Exercícios variados - Capítulo 1 - Cálculo matricial

1. Discuta o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1+3a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + cz = 3 \\ bx + cy + -3z = -5 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

admita a solução $(2, -1, 2)$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine e interprete geometricamente o conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.

Determine os valores de α para os quais $(-1, 0, 2, 1)$ é solução do sistema $Ax = 0$.

5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α para os quais A é invertível.

c) Considere $\alpha = 0$ e inverta a matriz A.

6. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.

a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?

b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

7. Determine matrizes X e Y tais que $3X - 2Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $-X + Y = 2I$.

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $(A - 5I)B$.

b) Determine a inversa de A e utilize-a para resolver o sistema $Ax = b$.

9. Considere uma matriz A tal que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, em que $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule P^{-1}.

b) Determine A.

c) Calcule A^{10}.

10. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3 = 0$.
Mostre que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

11. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 8 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é invertível.

12. Escreva uma equação vetorial equivalente a

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Soluções: **1.** $b = 0$ Imp.; $b \neq 0 \begin{cases} a = b & \text{Imp.} \\ a \neq b & \text{PD} \end{cases}$ **2.**. $a = -11$, $b = 5$, $c = -1$. **3.** $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3,\ x_2 = x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$, reta que passa na origem e contém o vetor diretor $(-1, 1, 1)$. **4.** $\alpha = 2$. **5.** **a)** $\alpha = 1 \begin{cases} \beta \neq 0 & \text{Imp.} \\ \beta = 0 & \text{Ind.} \end{cases}$; $\alpha \neq 1$ PD para todo o β. **b)** $\alpha \neq 1$. **c)** $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. **7.** $X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$. **8.** **a)** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -9 & -4 \\ 17 & 10 \end{bmatrix}$ **b)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1/2 \\ -2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$. **9.** **a)** $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$ **11.** $\lambda \neq \pm 2$.