

JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS

1. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ 2 - x^2 & x > 1 \end{cases}$ e o integral indefinido $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$. [3.5v]

- a) Calcule $F'(1)$.
 b) Indique uma expressão para F onde não figure o símbolo \int .
 c) Considere a região

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 1 \leq y \leq f(x)\}.$$

Represente graficamente a região R e calcule o volume do sólido resultante da rotação de R em torno do eixo dos xx .

2. Considere o vector $b = (1, 1)$ e a recta r definida por $2x + y = 0$. [1.5v]
- a) Calcule a projecção do vector b sobre a recta r , $\text{proj}_r(b)$.
 b) Calcule a área do triângulo definido pelos vectores b e $\text{proj}_r(b)$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$. [5v]

- a) Determine os valores de α e β tais que o sistema $Ax = 0$ é determinado.
 b) Para $\alpha = 1$ e $\beta = 4$:
i) Resolva o sistema $Ax = 0$ e descreva geometricamente o conjunto de soluções.
ii) Qual é o ângulo entre cada vector não nulo do conjunto de soluções da alínea anterior e cada linha da matriz A ?
 c) Para $\alpha = \beta = 1$:
i) Calcule $(A - 2I)B^T$, em que I é a matriz identidade de ordem 3.
ii) Calcule A^{-1} .
iii) Será que existe uma matriz C de ordem 3 não nula tal que $AC = 0$?

¹O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.