INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª chamada de Álgebra Linear

16 de janeiro de 2020 - Duração: 2h

Número: Nome: Turma:

[10v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha & -1 \\ -4 & 3 & \alpha \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [v_1\ v_2\ v_3]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β.

b) Indique, justificando, os valores de α e β para os quais:

i) $b \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

ii) Existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \vec{0}$.

iii) 0 é valor próprio de A.

iv) $(1, -3, 1)$ é vetor próprio de A.

v) $\text{dist}(b, \mathcal{C}(A)^\perp) < \|b\|$.

No que segue considere $\alpha = 1$.

c) Descreva, analítica e geometricamente, $\mathcal{C}(A^T)$.

d) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A^T)$.

e) Calcule os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

f) Determine uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $AP = PD$.

[4v] **2.** Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,\ x_1 - x_3 = 0\}$ e $b = (1, 1, 3, 3)$.

a) Determine uma base e a dimensão de V.

b) Determine a matriz de projeção sobre V.

c) Determine o vetor de V a menor distância de b e indique o valor dessa distância.

d) Indique, justificando, um vetor c de $\mathbb{R}^4$ tal que $\text{proj}_V(c) = \text{proj}_V(b)$ e a $\text{proj}_{V^\perp}(c)$ é um vetor unitário.

[2v] **3.** a) Define base de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$.

b) Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que se $A^T A x = 0$ então $x \in \mathcal{N}(A)$.

[4v] **4.** Um enólogo dispõe de 600€ para produzir duas marcas de *blend*, M_1 e M_2, a partir das castas A e B vinificadas em separado. Sabe-se que produzir um litro de vinho da casta A e da casta B custa, respectivamente, 1€ e 0.5€. As composições e os preços de venda de cada litro de *blend* estão indicados na tabela abaixo.
O enólogo comprometeu-se a vinificar pelo menos 260 litros a partir da casta A e dispõe de uva da casta B para vinificar até 300 litros. Comprometeu-se ainda a produzir pelo menos 100 litros de *blend* da marca M_2. Determine a quantidade de *blend* de cada marca que deve ser produzida de forma a maximizar a receita.

	Vinho da casta A	Vinho da casta B	Preço de venda (€/l)
Blend M_1	60%	40%	15
Blend M_2	20%	80%	10

a) Formule o problema em termos de programação linear, atribuíndo significado às variáveis.

b) Escreva o problema na forma *standard*.

c) Considere que o enólogo decide produzir 100 litros de *blend* da marca M_2. Determine a quantidade de *blend* da marca M_1 que é admissível produzir.

d) Determine, justificando, um plano de produção admissível que não corresponda a um vértice da região admissível do problema e indique o correspondente valor da receita.