

**JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS**

1. Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ . [5.5v]
- a) Indique, caso existam, as assíntotas ao gráfico de  $f$ .
  - b) Estude a monotonia de  $f$  e determine os extremos relativos de  $f$ .
  - c) Justifique que  $f$  não é invertível. Indique um intervalo  $I$  onde  $f$  é invertível e determine a função inversa de  $f$  restrita a  $I$ .
  - d) Determine uma primitiva de  $f$  em  $\mathbb{R}^+$  cujo gráfico não passe no ponto  $(1, \frac{1}{2})$ .
2. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$ . [1.5v]
3. Considere a função  $f(x) = \begin{cases} xe^x & x \leq 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$  e  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ , para  $x \in \mathbb{R}$ . [3v]
- a) Calcule  $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$ .
  - b) Indique uma expressão para  $g$  em que não figure o símbolo do integral.
  - c) Escreva as equações de duas rectas tangentes ao gráfico de  $g$  horizontais.
4. Represente graficamente a região definida pelos gráficos das funções  $f(x) = \cos x$  e  $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$  no intervalo  $[0, \pi]$  e calcule a sua área. [2v]
5. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3]$  e o vector  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{bmatrix}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . [8v]
- a) Discuta, em função de  $\alpha$ , o sistema  $Ax = b$ .
  - b) Considere  $\alpha = 1$ .
    - i) Calcule  $A + 2bb^T$ .
    - ii) Resolva o sistema  $Ax = b$  e interprete geometricamente o conjunto de soluções.
  - c) Será que  $A$  é invertível?
  - d) Indique os vectores com norma  $\sqrt{2}$  que fazem um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  com  $v_1$  e  $v_2$ .
  - e) Considere a recta  $r$  que passa em  $(0,0,0)$  e contém o vector  $v_3$ . Calcule o vector da recta  $r$  mais próximo do vector  $(1,0,2)$ .

---

<sup>1</sup>O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.