

JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS

1. Considere a função $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$. [5.5v]
- Indique, caso existam, as assíntotas ao gráfico de f .
 - Estude a monotonia de f e determine os extremos relativos de f .
 - Justifique que f não é invertível. Indique um intervalo I onde f é invertível e determine a função inversa de f restrita a I .
 - Determine uma primitiva de f em \mathbb{R}^+ cujo gráfico não passe no ponto $(1, \frac{1}{2})$.
2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{\arcsin(3x)}$. [1.5v]
3. Considere a função $f(x) = \begin{cases} xe^x & x \leq 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$ e $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, para $x \in \mathbb{R}$. [3v]
- Calcule $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$.
 - Indique uma expressão para g em que não figure o símbolo do integral.
 - Escreva as equações de duas rectas tangentes ao gráfico de g horizontais.
4. Represente graficamente a região definida pelos gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$ e calcule a sua área. [2v]
5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. [8v]
- Discuta, em função de α , o sistema $Ax = b$.
 - Considere $\alpha = 1$.
 - Calcule $A + 2bb^T$.
 - Resolva o sistema $Ax = b$ e interprete geometricamente o conjunto de soluções.
 - Será que A é invertível?
 - Indique os vectores com norma $\sqrt{2}$ que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com v_1 e v_2 .
 - Considere a recta r que passa em $(0,0,0)$ e contém o vector v_3 . Calcule o vector da recta r mais próximo do vector $(1,0,2)$.

¹O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.