MATEMÁTICA I

Textos de Apoio

Isabel Faria e Pedro C. Silva

Instituto Superior de Agronomia

2019/20

Contents

Chapter 1

Funções reais de variável real

1.1 Conceitos básicos sobre funções

> Uma **função** f é uma correspondência que associa a cada elemento x de um dado conjunto D um único valor y.

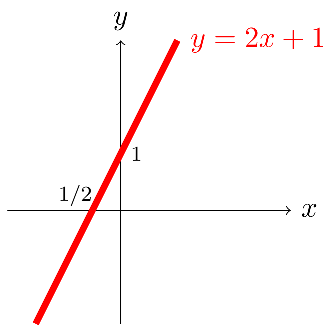
- O elemento x designa-se por *argumento* (ou *variável independente*) e o elemento y por *imagem* de x (ou *variável dependente de* x). Escreve-se usualmente $y = f(x)$.
- D (ou D_f) designa-se por *domínio de* f.
- O conjunto das imagens designa-se por *contra-domínio* ou *conjunto imagem* de f e denota-se por CD_f ou $\mathrm{Im}\, f$.
- Chama-se *gráfico de* f a $G_f = \{(x, y) \,:\, x \in D_f \text{ e } y = f(x)\}$.
- Se D_f e CD_f são subconjuntos de $\mathbb{R}$, f diz-se uma *função real de variável real* e o gráfico de f é, em geral, uma curva em $\mathbb{R}^2$.

São exemplos de funções reais de variável real:

1. A correspondência $f(x) = 2x + 1$, com $x \in \mathbb{R}$. O gráfico de f é

$$G_f = \{(x, y) \ : \ y = 2x + 1\}$$

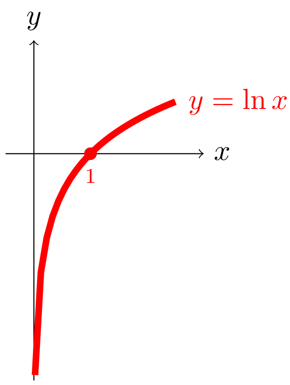
que corresponde à recta de $\mathbb{R}^2$ representada abaixo.



2. A correspondência $x \mapsto ln(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. O domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e gráfico de f é

$$G_f = \{(x, y) \ : \ x > 0 \text{ e } y = \ln x\},$$

que corresponde à curva de $\mathbb{R}^2$ representada abaixo.



3. A correspondência g definida pela seguinte tabela, onde $\mathrm{D}_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

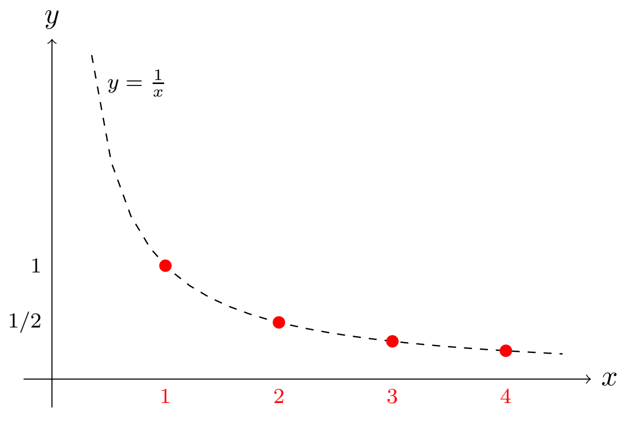
x	g(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

que pode também ser definida como o conjunto de pares ordenados,

$$\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}.$$

4. A sucessão de números reais,

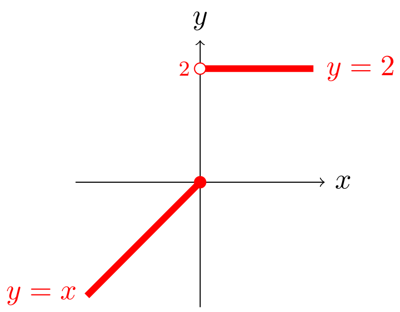
$$n \in \mathbb{N} \mapsto x_n = \frac{1}{n}.$$



5. A correspondência definida por ramos,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

cujo o gráfico se encontra representado na figura abaixo.

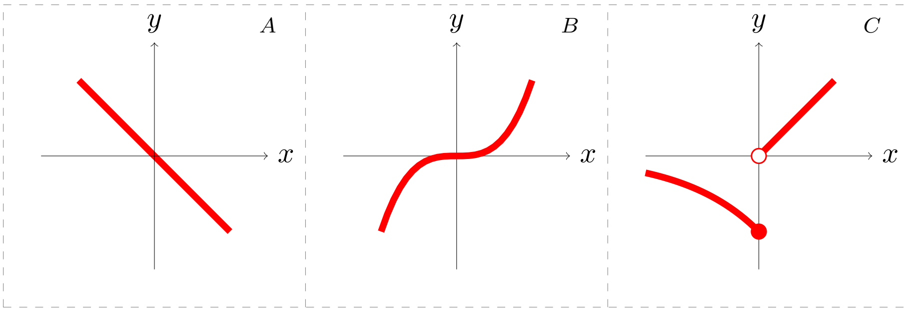


Para uma função real de variável real temos os seguintes conceitos:

- f diz-se *injectiva* se para todos os pontos do domínio $x_1 \neq x_2$ se tem $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f diz-se *crescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f diz-se *estritamente crescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) < f(x_2)$.
- f diz-se *decrescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f diz-se *estritamente decrescente* se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ se tem $f(x_1) > f(x_2)$.
- f diz-se *monótona* se é crescente ou decrescente no seu domínio.
- f diz-se *estritamente monótona* se é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio

Uma função estritamente monótona é injectiva mas uma função injectiva não é necessariamente monótona.

Exemplos:



A: f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$ logo é injectiva em $\mathbb{R}$;

B: f é estritamente crescente $\mathbb{R}$ logo é injectiva em $\mathbb{R}$;

C: f é injectiva em $\mathbb{R}$ mas não é monótona em $\mathbb{R}$.

Algumas classes importantes de funções reais de variável real

Funções polinomiais

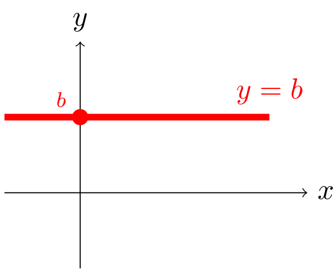
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

de domínio $\mathbb{R}$.

- **Função constante** (polinómio de grau 0):

$$f(x) = b \qquad (b \in \mathbb{R})$$

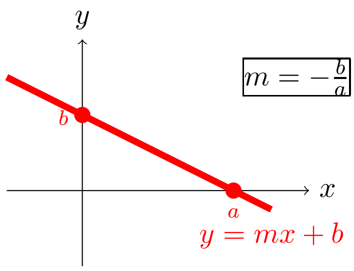
O gráfico de $f(x) = b$ é a recta horizontal $y = b$.



- **Função linear** (polinómio de grau 1):

$$f(x) = mx + b \qquad (m, b \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0)$$

O gráfico de $y = f(x)$ é a recta de declive m que intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$. Se (x_1, y_1) e (x_0, y_0) são dois pontos da recta tem-se $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.



- **Funções quadráticas** (polinómio de grau 2):

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0)$$

As raízes (eventualmente complexas) são dadas pela fórmula resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o *binómio discriminante.*

1. Se $\Delta > 0$ o polinómio admite as duas raízes reais simples,

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

e tem-se

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

2. Se $\Delta = 0$ o polinómio admite a raíz real dupla,

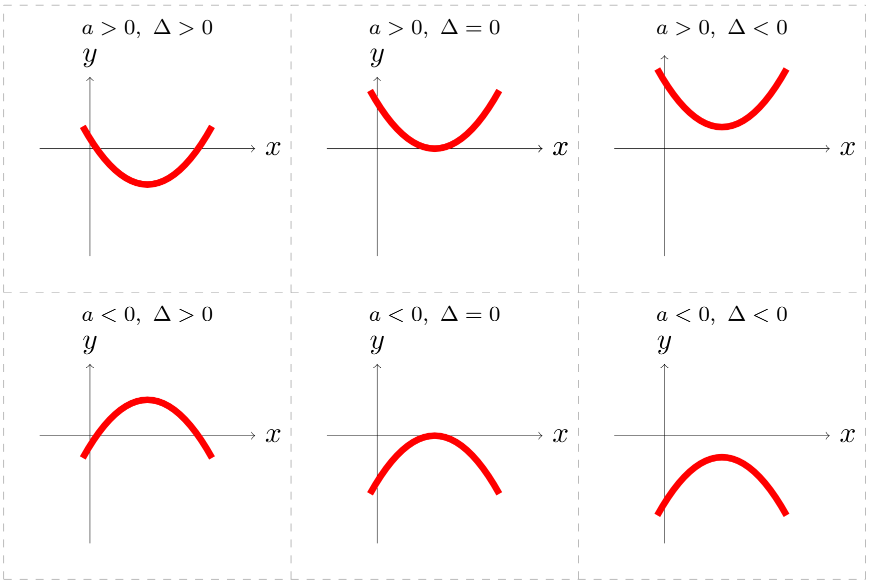
$$\alpha = \frac{-b}{2a},$$

   e tem-se

$$f(x) = a(x - \alpha)^2.$$

3. Se $\Delta < 0$ o polinómio não admite raízes reais (polinómio irredutível).

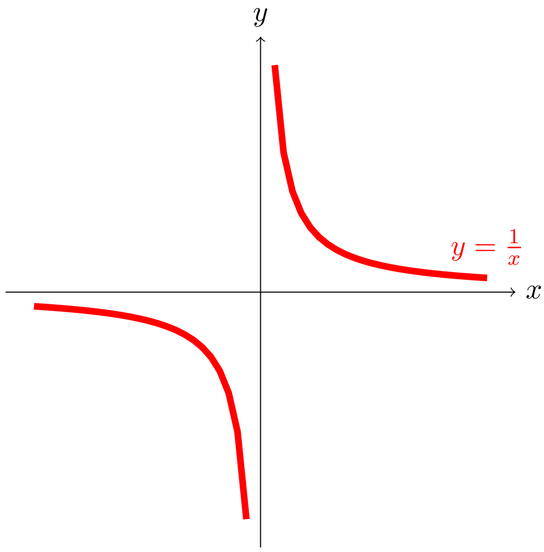
Os gráficos de $f(x)$ são parábolas cuja concavidade está virada para cima (baixo) consoante $a > 0$ $(a < 0)$.



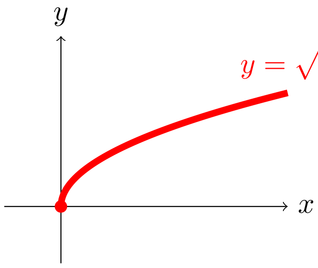
Função potência $f(x) = x^{\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

Alguns exemplos importantes:

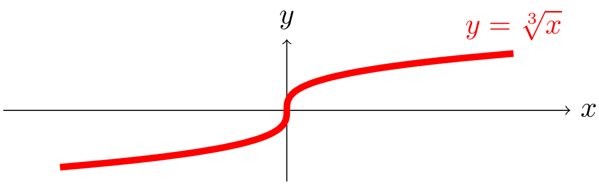
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



- $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $\mathbb{R}_0^+$.

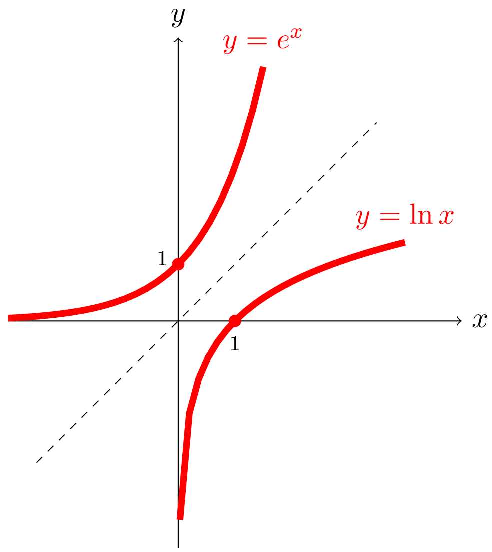


- $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cujo domínio é $\mathbb{R}$.



Função exponencial e função logarítmo

Estritamente crescentes no respectivos domínios ($\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$).



Operações com funções

Soma, produto e quociente de funções

Sejam

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

e $D = D_f \cap D_g$. Define-se:

- **Soma** de f com g,

$$f + g : D \to \mathbb{R}, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{para todo o } x \in D.$$

- **Produto** de f e g,

$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \quad \text{para todo o } x \in D.$$

- Se $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in D$, define-se ainda o **quociente** de f por g,

$$f/g : D \to \mathbb{R}, \qquad (f/g)(x) = f(x)/g(x), \quad \text{para todo o } x \in D.$$

Exemplo

Consideremos as funções $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 + 1$. Tem-se:

1. $(f + g)(x) = \ln x + x^2 + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.
2. $(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1) \ln x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.
3. $(f/g)(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Composição de funções

Consideremos as funções

$$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

Se $\mathrm{CD}_f \subset D_g$, define-se a *composição* de g com f, por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \text{para todo o } x \in D_f.$$

Esquematicamente,

$$\begin{tikzcd} x \in D_f \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, mapsto, "g \circ f"'] & f(x) \in D_g \arrow[r, mapsto, "g"] & g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemplo

Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$, tem-se:

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{e^x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\sqrt{x}}$, para todo o $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Função inversa

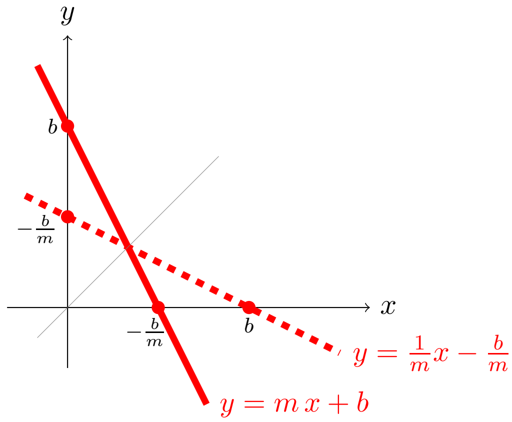
Se f é uma função injectiva num intervalo $I = D_f$ e $J = CD_f$ o respectivo contradomínio, existe uma função $g : J \to I$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo o $x \in I$. A função g é única e chama-se *inversa* de f (em I) que se denota por f^{-1}.

Observações:

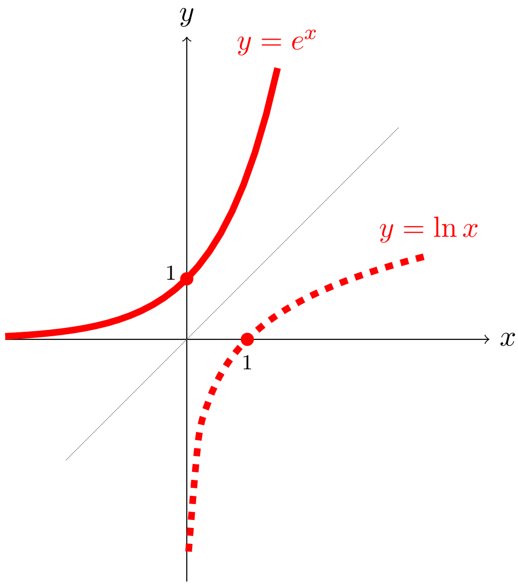
1. - $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo o $x \in D_f$.
   - $(f \circ f^{-1})(x) = x$ para todo o $x \in D_{f^{-1}}$.
2. Se $f : D_f \to \mathrm{CD}_f$ então $f^{-1} : D_{f^{-1}} = \mathrm{CD}_f \to \mathrm{CD}_{f^{-1}} = D_f$.
3. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à recta $y = x$.

Exemplos

1. A inversa da função linear $f(x) = mx + b$, com $m \neq 0$, é a função linear $f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{b}{m}$.



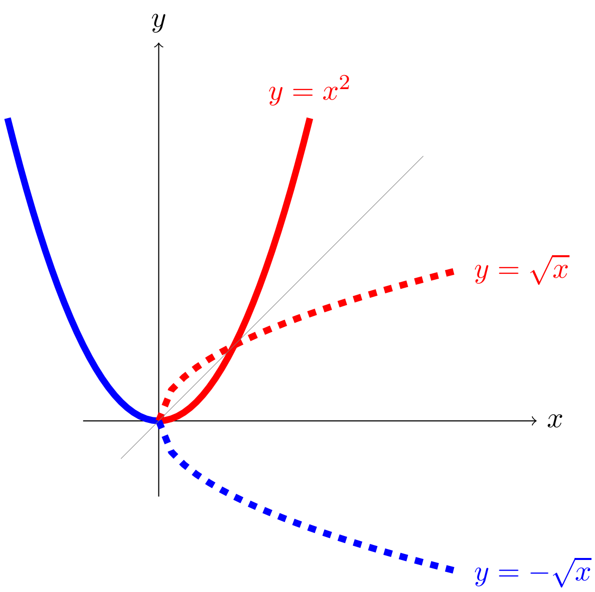
2. Se $f(x) = e^x$ então $f^{-1}(x) = \ln x$, tendo-se $e^{\ln x} = x$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$ e $\ln(e^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



3. A função $f(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}$ e com contradomínio $\mathbb{R}_0^+$, é injectiva (estritamente monótona) nos intervalos $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$, tendo-se:

- $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tem inversa $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, definida por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

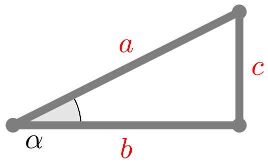
- $f :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[$ tem inversa $f^{-1} : [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$, definida por $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.



Funções trignométricas e respectivas inversas

Relações trignométricas

Considere o triângulo rectângulo



Relações trignométricas envolvendo os comprimentos dos lados do triângulo:

$$\sin\alpha = \frac{c}{a}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b}.$$

Valores "notáveis" no 1º quadrante.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞

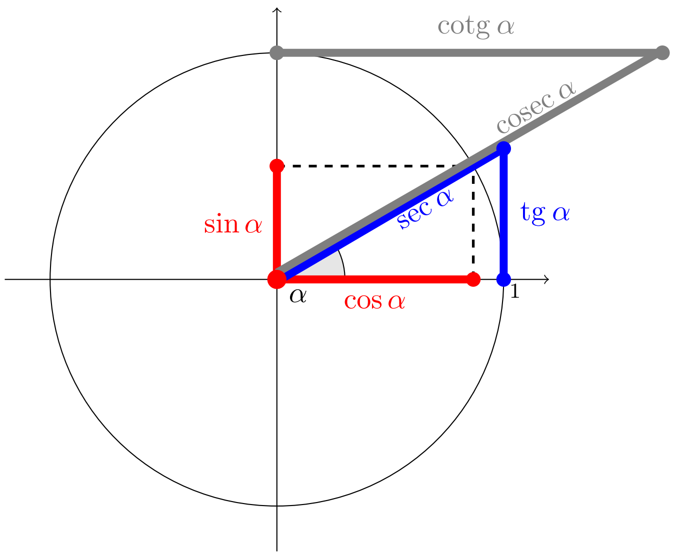
Definem-se ainda

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c}.$$

Têm-se as seguintes relações trignométricas fundamentais:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha, \qquad \operatorname{cotg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Representação das relações trignométricas no círculo trignométrico:



Funções seno e arco seno

A função *seno* é uma função periódica em $\mathbb{R}$ (de período 2π) e toma valores em $[-1,1]$, sendo injectiva nos intervalos da forma $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$ com $k \in \mathbb{Z}$. O intervalo *standard* de invertibilidade é $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Neste intervalo,

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1],$$

é estritamente crescente e tem inversa estritamente crescente,

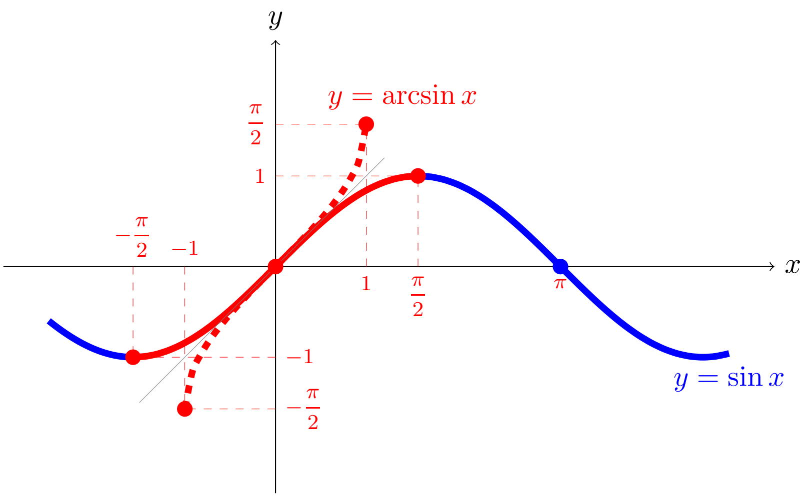
$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

que se designa por *arco seno*, tendo-se,

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in [-1,1],$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Representação dos gráficos das funções seno e arco seno.



Funções cosseno e arco cosseno

A função *cosseno* é uma função periódica em $\mathbb{R}$ (de período 2π) e toma valores em $[-1, 1]$, sendo injectiva nos intervalos da forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ com $k \in \mathbb{Z}$. O intervalo *standard* de invertibilidade é $[0, \pi]$. Neste intervalo,

$$\cos : \ [0, \pi] \to [-1, 1],$$

é estritamente decrescente e tem inversa estritamente decrescente,

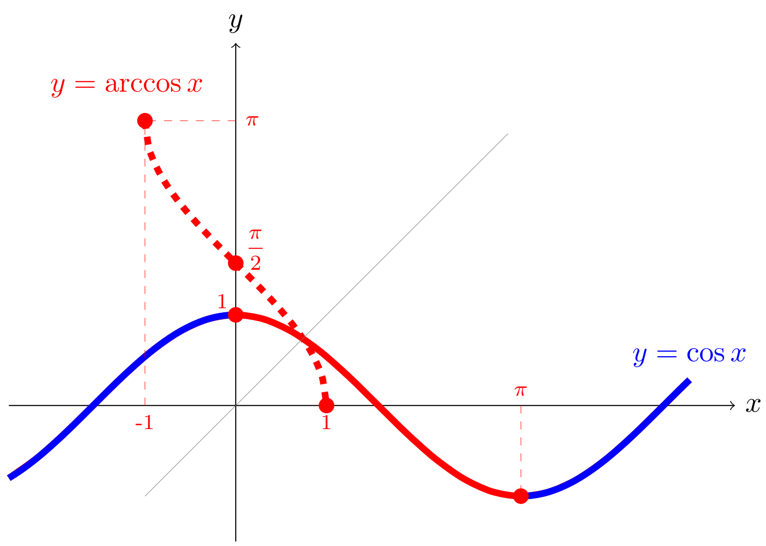
$$\arccos \ : \ [-1, 1] \to [0, \pi]\,,$$

que se designa por *arco cosseno*, tendo-se,

$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in [-1, 1],$$

$$\arccos(\cos x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in [0, \pi].$$

Representação dos gráficos das funções cosseno e arco cosseno.



Funções tangente e arco tangente

A função *tangente* encontra-se definida em $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ e toma valores em $\mathbb{R}$. Tem período π, sendo injectiva (estritamente crescente) nos intervalos da forma $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ com $k \in \mathbb{Z}$. O intervalo *standard* de invertibilidade é $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, Neste intervalo,

$$\mathrm{tg}: \ \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\to \mathbb{R},$$

é estritamente crescente e tem inversa estritamente crescente,

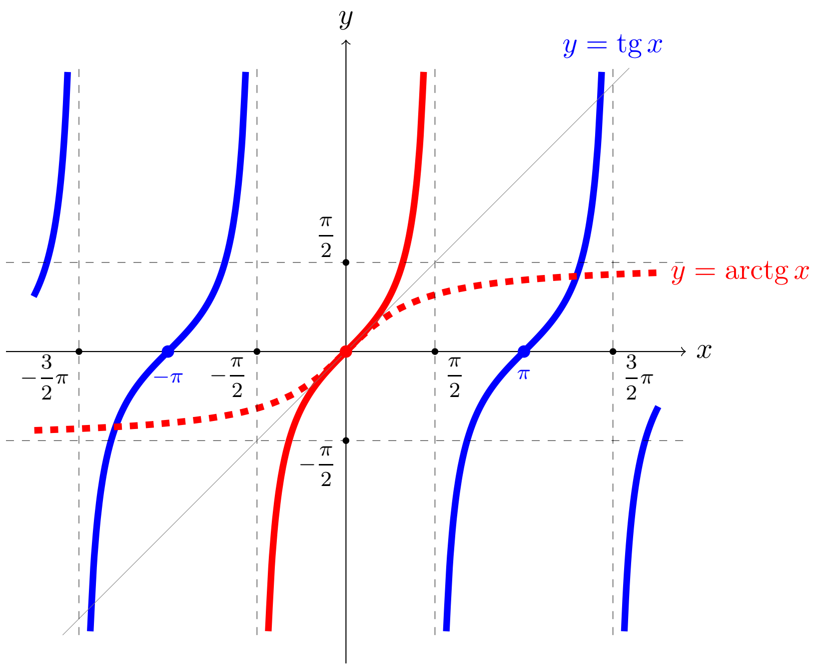
$$\mathrm{arctg}\ :\ \mathbb{R} \to \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

que se designa por função *arco tangente*, tendo-se,

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x, \qquad \text{para todo o } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[,$$

Representação dos gráficos das funções tangente e arco tangente.



1.2 Limites e continuidade

Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ tal que f está definida à esquerda e/ou à direita de a (a não tem que ser necessariamente um ponto de D_f).

Diz-se que f *converge para* $b \in \mathbb{R}$ *quando* x *tende para* a e escreve-se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

se os valores de f estão arbitrariamente próximos de b para os pontos de D_f que estão suficientemente próximos (e são distintos) de a.

Notas:

- Também se define a noção de limite quando a (ou b) é infinito.
- Se f apenas está definida à direita [esquerda] de a, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b \qquad \left[\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b \right].$$

  Os limites anteriores designam-se por *limites laterais*. Quando f está definida à esquerda e à direita do ponto $x = a$, tem-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = b.$$

Exemplo

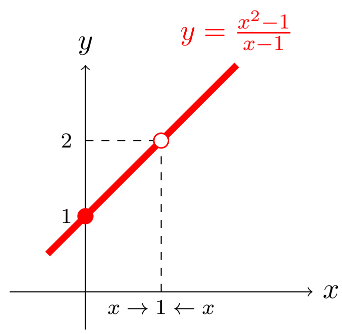
Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida em $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ e $a = 1$. Observando a tabela podemos constatar que os valores de $f(x)$ se aproximam de 2 à medida que x se aproxima 1,

x	···	.97	.98	.99	1	1.01	1.02	1.03	···
f(x)	···	1.97	1.98	1.99	ND	2.01	2.02	2.03	···

De facto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

O gráfico de $f(x)$ corresponde ao gráfico da função linear $y = x+1$, com o ponto $(1,2)$ removido, pois f não está definida no ponto $a = 1$.



Uma função f diz-se *contínua em* $a \in D_f$ se existe o limite de $f(x)$ quando x tende para a e o seu valor é igual a $f(a)$, isto é,

$$f \text{ contínua em } a \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Notas:

- As funções polinomiais, potência, exponencial, logarítmo e funções trignométricas e respectivas inversas, são contínuas nos seus domínios.
- As funções que se podem obter como somas, produtos, quocientes e composições de funções contínuas (ou das suas inversas), ainda são contínuas nos seus domínios. Para estas funções o cálculo do limite

num ponto do domínio faz-se substituindo o valor da função nesse ponto.

Por exemplo, considerando $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ e $a = 0 \in D_f$, tem-se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} = \frac{\ln(1)}{2} = 0.$$

- Se f apenas está definida à direita [esquerda] de a, incluindo o ponto a, f diz-se contínua em a se

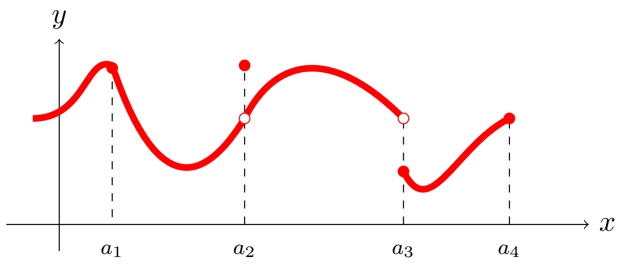
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \left[\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right].$$

Quando f está definida à esquerda e à direita do ponto $x = a$, tem-se

$$f \text{ contínua em } a \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Exemplo

Consideremos a função $y = f(x)$ representada no gráfico abaixo.



- Existe $\lim\limits_{x\to a_1} f(x) = f(a_1)$ pelo que f é contínua em a_1.

- Existe $\lim\limits_{x\to a_2} f(x)$ pois existem e são iguais $\lim\limits_{x\to a_2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a_2^+} f(x)$, mas f não é contínua em a_2 pois $\lim\limits_{x\to a_2} f(x) \neq f(a_2)$.

- Não existe $\lim\limits_{x\to a_3} f(x)$ pois $\lim\limits_{x\to a_3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a_3^+} f(x)$, pelo que f também não é contínua em a_3.

- Existe $\lim\limits_{x\to a_4} f(x) = \lim\limits_{x\to a_4^-} f(x) = f(a_4)$, pelo que f é contínua em a_4.

Propriedades operatórias dos limites

Consideremos funções $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = c,$$

onde a, b e c podem ser reais ou $\pm\infty$. Tem-se:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$,

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = b\, c$,

- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$,

admitindo a extensão das operações aritméticas indicada simbolicamente na seguinte tabela, onde $k \in \mathbb{R}$:

$k \pm \infty = \pm\infty$	$\infty + \infty = \infty$	$\infty - \infty$ indeterm.
$k \times \infty = \infty \quad (k \neq 0)$	$\infty \times \infty = \infty$	$0 \times \infty$ indeterm.
$\frac{\infty}{k} = \infty$; $\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{k}{0} = \infty$; $\frac{0}{k} = 0 \quad (k \neq 0)$	$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ indeterm.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) \overset{0+\infty}{=\!=} +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{e^x} \overset{\frac{\infty}{0}}{=\!=} \infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} \sin x\right)$ é uma indeterminação do tipo $\infty \times 0$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Indeterminações do tipo $\infty - \infty$ geradas por funções polinomiais

Seja

$$P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Pondo em evidência o monómio de maior grau mostra-se que

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_m x^m.$$

Exemplo

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - x \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

Indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ geradas por funções racionais

Considere os polinómios

$$\begin{aligned} P(x) &= a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0, \\ Q(x) &= b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0, \end{aligned}$$

de graus m e n, respectivamente. Atendendo ao que foi dito atrás, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & m = n, \\ 0, & m < n, \\ \pm\infty, & m > n, \end{cases}$$

onde o sinal do limite quando $m > n$ depende do sinal de $\dfrac{a_m}{b_n}$. Temos um resultado do mesmo tipo quando $x \to -\infty$.

Exemplos

1. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-5x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2}{3}.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2+1}{-x^5-8x^3+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(5+\frac{1}{x^2}\right)}{x^5\left(-1-\frac{8}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)} = 0.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^4+x^3-x}{7x^3-5x^2+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(7-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^3}\right)} = -\infty.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3+x-4}{5x^2-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(-1+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(5-\frac{5}{x}\right)} = +\infty.$

Nota

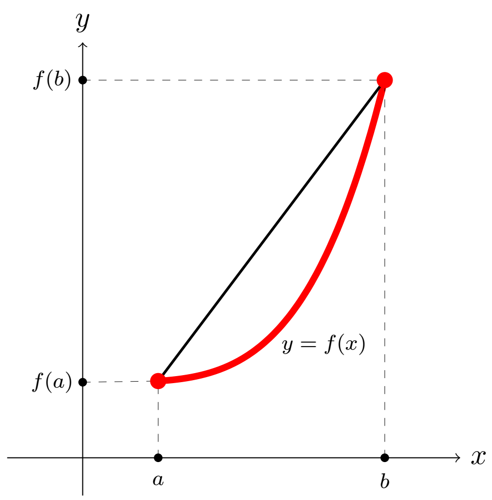
As indeterminações do tipo $\infty-\infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ geradas por outros tipos de funções, serão consideradas posteriormente.

1.3 Derivadas

Consideremos uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Chamamos *taxa de variação média* de f em $[a,b]$ à razão,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometricamente a taxa de variação média corresponde ao declive da secante que une os pontos do gráfico de f, $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Chamamos *taxa de variação instantânea* ou *derivada* de f no ponto de abcissa $a \in D_f$ ao limite (quando existe)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Nesse caso a a função f diz-se *derivável em* a e denota-se a derivada de f nesse ponto por $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

A taxa de variação média [instântanea] também se designa por *velocidade média* [*instântanea*] ou *taxa de crescimento média* [*instântanea*], consoante o contexto em que se aplica.

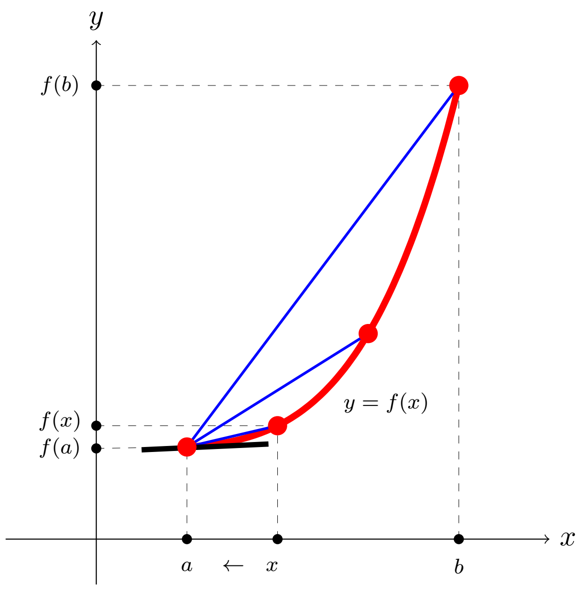
Dizemos que uma função é *derivável* (num intervalo) se for derivável em todos os pontos desse intervalo.

Tomando $h = x - a$ concluímos imediatamente que a definição de $f'(a)$ também pode ser apresentada como o limite, quando existe, de

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

o que pode ser útil nalguns cálculos.

Geometricamente, derivada de f em a corresponde ao declive da *recta tangente ao gráfico de* f *no ponto* $(a, f(a))$, recta essa cujo declive é o limite dos declives das secantes que unem os pontos do gráfico de f, $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, quando x tende para a.



Tem-se que f é derivável em a se e só se admitir recta tangente ao seu gráfico no ponto $(a, f(a))$.

Para determinarmos uma equação para esta recta tangente, comecemos por recordar que uma equação da recta com declive m que passa no ponto (x_0, y_0) é dada por,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

No caso da recta tangente tem-se $x_0 = a$, $y_0 = f(a)$ e $m = f'(a)$. Portanto uma equação da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemplos

1. A taxa de variação média de $f(x) = 5x^2 + 2x$ no intervalo $[0, 1]$ é

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 7.$$

A taxa de variação instantânea de f em 0, é

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \to 0} (5x + 2) = 2.$$

A taxa de variação instantânea de f em a, i.e., a derivada de f em a, é

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{5(a+h)^2 + 2(a+h) - (5a^2 + 2a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{5(a^2 + h^2 + 2ah) + 2(a+h) - (5a^2 + 2a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{5h^2 + 10ah + 2h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (5h + 10a + 2) = 10a + 2.
\end{aligned}$$

2. A derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $x \neq 0$ é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Para funções definidas por ramos a existência de derivada tem que ser estudada considerando os limites,

$$f'_e(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad f'_d(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

que se designam, respectivamente por, *derivada lateral esquerda* e *derivada lateral direita* de f em $x = a$.

A existência de derivada em a é equivalente à existência e igualdade de derivadas laterais nesse ponto.

Exemplos

1. Consideremos a função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

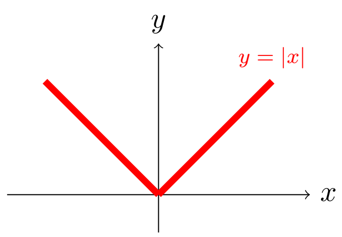
Tem-se

$$f'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1,$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1.$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$ não existe derivada de f em 0.



2. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \geq 1, \\ x^2, & x < 1. \end{cases}$$

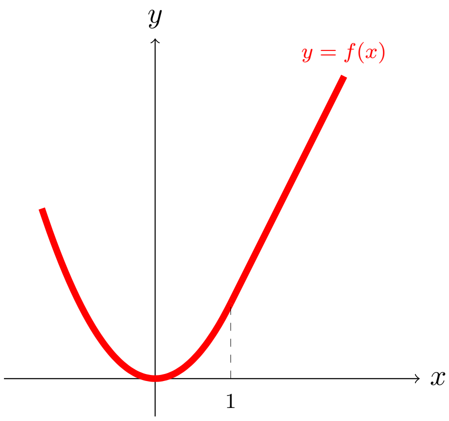
Tem-se

$$f'_d(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2(h+1)-1)-1}{h} = 2,$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h+2) = 2.$$

Como $f'_e(1) = f'_d(1) = 2$, existe $f'(1) = 2$.



Teorema Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num ponto $a \in D_f$, f é contínua em a.

Notas:

- Se f não é contínua num ponto então não é derivável nesse ponto.
- Se f é contínua num ponto, f pode ou não ser não derivável nesse ponto, como se viu nos exemplos anteriores.

Exemplo

Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

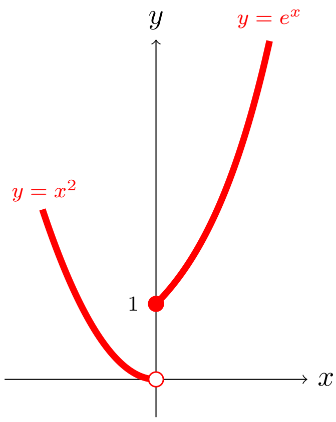
Tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0.$$

Como os limites laterais em 0 são distintos, f não é contínua em $x = 0$, pelo que também não é derivável nesse ponto.



Derivadas de algumas funções elementares

Usando a definição de derivada e procedendo de modo análogo ao que fizémos para a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ podemos determinar expressões para as derivadas das funções elementares mais conhecidas, que se resumem na seguinte tabela.

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	- $\sin x$	
tg x	$\sec^2 x$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	

Regras de derivação

Teorema

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, onde $D = D_f \cap D_g$. São válidas as seguintes propriedades.

- **(Derivada da soma)** $f + g : D \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad \forall x \in D.$$

- **(Derivada do produto)** $fg : D \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \forall x \in D.$$

Em particular, se $k \in \mathbb{R}$, $k\,f$ é derivável tendo-se $(k\,f)' = k\,f'$.

- **(Derivada do quociente)** Se além disso $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in D$, então $\dfrac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \forall x \in D.$$

Exemplos

1. $(\ln x + \sin x)' = (\ln x)' + (\sin x)' = \dfrac{1}{x} + \cos x.$

2. $(\ln x \sin x)' = (\ln x)' \sin x + \ln x(\sin x)' = \dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cos x.$

3. $(4 \sin x)' = 4(\sin x)' = 4 \cos x.$

4. $\left(\dfrac{\ln x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\ln x)' \sin x - \ln x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cos x}{\sin^2 x}.$

5. $\left(\dfrac{\ln x}{4}\right)' = \dfrac{1}{4}(\ln x)' = \dfrac{1}{4 \ln x}.$

Teorema (Derivada da função composta)

Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $\mathrm{CD}_f \subset D_g$. Então $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ é derivável, tendo-se

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x), \qquad \forall x \in D_f.$$

Exemplos

1. Seja $f(x) = 2x$ e $g(x) = e^x$. Então $(g \circ f)(x) = e^{2x}$, tendo-se,

$$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}(2x)' = 2\,e^{2x}.$$

2. Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin x$. Então $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$, tendo-se,

$$\left(\sin(x^2)\right)' = \sin'(x^2)\,(x^2)' = \cos(x^2)2x.$$

3. Seja $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2$. Então $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$, tendo-se,

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

Usando a regra de derivação da função composta e a tabela de derivadas de funções elementares dada anteriormente, obtemos a seguinte tabela, onde f denota uma função derivável que pode entrar na composição:

$$\begin{array}{rcl}
(f^\alpha)' & = & \alpha f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \\
(e^f)' & = & e^f f' \\
(\ln f)' & = & \dfrac{f'}{f} \\
(\sin f)' & = & \cos(f)\, f' \\
(\cos f)' & = & -\sin(f)\, f' \\
(\operatorname{tg} f)' & = & \sec^2(f)\, f' \\
(\arcsin f)' & = & \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \\
(\arccos f)' & = & -\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \\
(\operatorname{arctg} f)' & = & \dfrac{f'}{1+f^2}
\end{array}$$

Aproximação linear a uma função

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in D$. Recordemos que uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

À função linear

$$L(x) = f'(a)(x-a) + f(a),$$

chama-se a *linearização de f em a* e corresponde à melhor aproximação linear de f na vizinhança do ponto $x = a$, tendo-se

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0.$$

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^2$ e $a \in \mathbb{R}$. Tem-se $f'(x) = 2x$ pelo que uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \Leftrightarrow \quad y = a^2 + 2a(x - a).$$

A aproximação linear de f na vizinhança de a é dada pela função

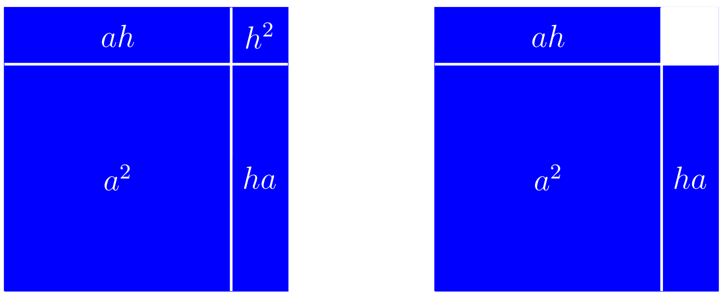
$$L(x) = a^2 + 2a(x - a).$$

Para $x = a + h$ perto de a, isto é, para valores pequenos de $|h|$, tem-se

$$f(a + h) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 \approx L(x) = a^2 + 2ah.$$

O erro da aproximação anterior é $|f(a + h) - L(a + h)| = h^2$.

Se $a, h > 0$, podemos interpretar geometricamente $f(a + h)$ e $L(a + h)$ como as áreas das regiões representadas (a azul) na figura abaixo.



O erro da aproximação corresponde à área do quadrado de lado h que falta na segunda região.

1.4 Regra de Cauchy

O seguinte resultado permite levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (Regra de Cauchy)

Sejam f e g duas funções deriváveis num intervalo I aberto, a extremidade de I ($a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$). Suponhamos ainda que $g'(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$ e que

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (ou ∞),

(ii) existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ (finito ou infinito).

Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{1} = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\cos x}{2} = -\dfrac{1}{2}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{3x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{6} = +\infty.$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2 = +\infty.$

Para além das indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, indeterminações de outros tipos podem também ser levantadas pela regra de Cauchy, transformando-as em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Indeterminações do tipo $\infty \times 0$

As indeterminações do tipo $\infty \times 0$ são geradas pelo produto de duas funções f e g, em que uma converge para 0 e a outra para infinito. Estas indeterminações podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ considerando, respectivamente,

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} \qquad \text{ou} \qquad f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}.$$

Exemplos

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x \overset{0 \times \infty}{=\!=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0.$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x \overset{\infty \times 0}{=\!=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{-e^x} = 0.$

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x \overset{0 \times \infty}{=\!=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{\cos x}{\sin x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

   $- \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} - \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0.$

Observação:

No levantamento de indeterminações do tipo $0 \times \infty$, não é indiferente (em geral) a escolha da função que se passa para o denominador. Por exemplo, a escolha da função a passar para o denominador no limite

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x \overset{0 \times \infty}{=\!=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{-1}{x \ln^2 x}} = - \lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x,$$

não simplificou o cálculo desse limite, enquanto que transformando a indeterminação $0 \times \infty$ em $\frac{\infty}{\infty}$, se tem

$$\lim x \ln x \overset{0 \times \infty}{=\!=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Indeterminações do tipo $\infty - \infty$

Estas indeterminações podem frequentemente serem transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, efectuando uma das seguintes operações:

1. Reduzir a expressão ao mesmo denominador;
2. Pôr em evidência uma das parcelas da expressão;
3. Multiplicar e dividir pelo "conjugado" da expressão.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\sec x - \operatorname{tg} x) \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1-\sin x}{\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{-\sin x} = -0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln x) \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$

   (C.A.: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$)

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$

Outros tipos de indeterminações: 0^0, 1^∞ e ∞^0

Estas indeterminações são geradas por limites do tipo

$$\lim_{x\to a} f^g,$$

com $f > 0$. Estas indeterminações podem ser transformadas em indeterminações do tipo $0 \times \infty$ atendendo a que

$$\lim_{x\to a} f^g = e^{\lim\limits_{x\to a}\ln(f^g)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g\ln f},$$

se este último limite existir.

Exemplos

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x \overset{0^0}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim\limits_{x\to 0^0} e^{x\ln x}$.

   Como vimos anteriormente, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, pelo que

   $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)} = e^0 = 1.$$

   .

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{1^\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

   Ora, $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{\infty\times 0}{=\!=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 1$, pelo que $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{\infty^0}{=\!=} \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$.

   Ora, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, pelo que $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

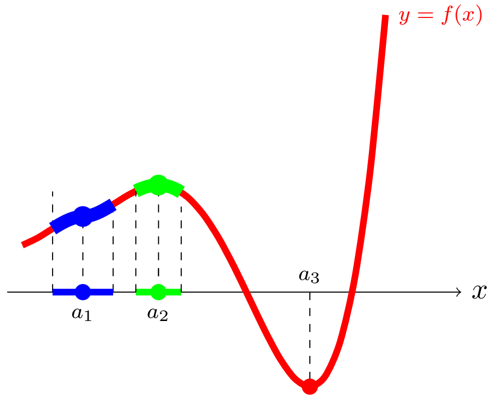
1.5 Estudo de funções

Definição Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D_f$.

Diz-se que:

- f atinge o *máximo* absoluto em a se $f(x) \leq f(a)$ para todo o $x \in D_f$;
- f atinge o *mínimo* absoluto em a se $f(x) \geq f(a)$ para todo o $x \in D_f$;
- f atinge um *máximo* (relativo ou local) em a se $f(x) \leq f(a)$ para os pontos do domínio contidos nalgum intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$;

- f atinge um *mínimo* (relativo ou local) em a se $f(x) \geq f(a)$ para os pontos do domínio contidos nalgum intervalo $]a-\delta, a+\delta[$ $(\delta > 0)$;



No intervalo $]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$ (a azul), $f(x) \geq f(a_1)$ pelo que f tem um mínimo (relativo) em a_1 de valor $f(a_1)$. Como $f(x) \geq f(a_3)$ para todo o $x \in D_f$, f tem um mínimo absoluto em a_3 de valor $f(a_3)$.

No intervalo $]a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon[$ (a verde), $f(x) \leq f(a_2)$ pelo que f tem um máximo (relativo) em a_2 de valor $f(a_2)$.

No estudo da monotonia e extremos (relativos) de uma função, isto é, respectivos máximos e mínimos (locais), a derivada vai desempenhar um papel fundamental, como veremos.

Teorema Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo aberto I. Tem-se que:

1. Se $f' > 0$ $[f' < 0]$ em I, f é estritamente crescente [decrescente] em I.

2. Se $f' \geq 0$ $[f' \leq 0]$ em I, f é crescente [decrescente] em I.

Corolário Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo aberto I tal que $f' > 0$ ou $f' < 0$ em I, f é injectiva em I. Em particular f é invertível no intervalo I.

Exemplo

Consideremos $f(x) = x + \ln x$ cujo domínio é $\mathbb{R}^+$. Tem-se

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, e portanto é invertível em $\mathbb{R}^+$.

Corolário Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo aberto I e $a \in I$. Tem-se que:

1. Se $f' > 0$ à esquerda de $x = a$ e $f' < 0$ à direita de $x = a$ então f tem um máximo relativo em $x = a$;

2. Se $f' < 0$ à esquerda de $x = a$ e $f' > 0$ à direita de $x = a$ então f tem um mínimo relativo em $x = a$.

		a	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$	max.	$\searrow$

		a	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	min.	$\nearrow$

Teorema Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo aberto I e $a \in I$ um extremo relativo de f. Então tem-se $f'(a) = 0$.

Definição Um ponto $a \in D_f$ diz-se um *ponto crítico* (ou de *estacionaridade*) de f se $f'(a) = 0$.

Notas:

- O teorema anterior significa que os extremos relativos de uma função derivável num intervalo aberto se encontram entre os pontos críticos dessa função.
- A recíproca do teorema anterior é no entanto falsa, isto é, existem pontos críticos que não são extremos relativos.

Definição Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real derivável no intervalo I. Diz-se que:

- f tem concavidade *virada para cima* em I se para todo o $a \in I$ a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ está abaixo do gráfico de f (numa viz. desse ponto);
- f tem concavidade *virada para baixo* em I se para todo o $a \in I$ a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ está acima do gráfico de f (numa viz. desse ponto).

O estudo da concavidade de uma função faz-se com recurso à 2ª derivada.

Teorema Seja f uma função com 2ª derivada no intervalo I.

1. Se $f'' > 0$ em I, f tem concavidade *virada para cima*;
2. Se $f'' < 0$ em I, f tem concavidade *virada para baixo*.

Definição Um ponto $a \in D_f$ diz-se um *ponto de inflexão* se em a ocorrer uma mudança do sentido da concavidade de f.

Teorema Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável num intervalo aberto I e $a \in I$. Se f tem um ponto de inflexão em a, então $f''(a) = 0$.

A recíproca do teorema anterior é falsa, isto é, existem pontos que anulam a segunda derivada que não são pontos de inflexão, como ocorre por exemplo com a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4$ (verfique).

Vamos ilustrar os conceitos anteriores através do estudo de duas funções.

Estudo da função $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. *Domínio e assímptotas verticais.*

   Tem-se $D_f = \mathbb{R}$ (porquê?) pelo que f não admite assímptotas verticais.

2. *Assímptotas não verticais.*

   Tem-se $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$, pelo que f admite a assímptota horizontal $y = 0$ à esquerda e à direita.

3. *Intersecção com os eixos coordenados*

   Tem-se $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, pelo que o único ponto de intersecção é a origem do referencial.

4. *Monotonia e extremos.*

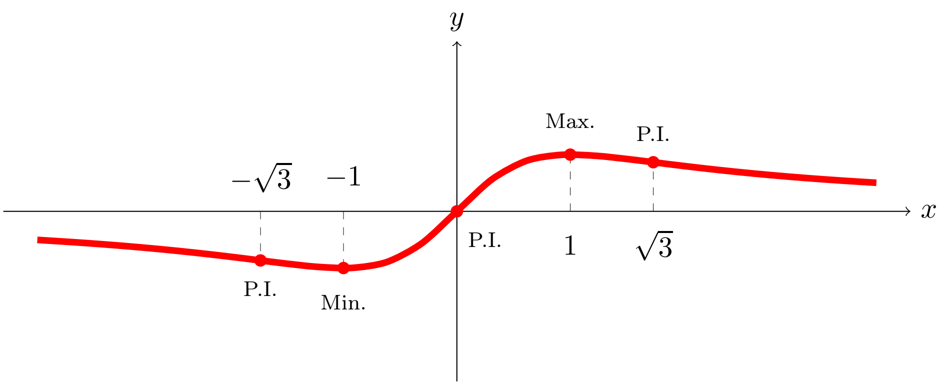
   Tem-se $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$, pelo que f tem pontos críticos $x = 1$ e $x = -1$. Além disso, como $(1+x^2)^2 > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ tem o mesmo sinal de que $1 - x^2 >$, pelo que f' toma valores positivos em $]-1,1[$ e negativos em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ (ver o quadro de sinais).

5. *Pontos de inflexão e concavidades.*

   Tem-se $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0$, pelo que f tem pontos de inflexão $x=0$, $x=\sqrt{3}$ e $x=-\sqrt{3}$ (ver o quadro de sinais).

		$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	
f'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f	$\searrow$		Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	P.I.	$\smile$	P.I.	$\frown$	P.I.	$\smile$

6. *Esboço do gráfico.*



Estudo da função $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$**.**

1. *Domínio e assímptotas verticais.*

   Tem-se $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ (porquê?).

   Tem-se $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\log x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{\log x} = +\infty$ pelo que f admite assímptota vertical $x = 1$, em $-\infty$ à esquerda de $x = 1$ e em $+\infty$ à direita de $x = 1$.

2. *Assímptotas não verticais.*

   Tem-se

   $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\log x} = \lim_{x\to+\infty\infty} \frac{1}{\log x} = 0,$$

   e

   $$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty,$$

   pelo que f não admite assímptotas não verticais.

3. *Intersecção com os eixos coordenados*

   Não há intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

4. *Monotonia e extremos.*

   Tem-se $f'(x) = \dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2} = 0 \Leftrightarrow \log x = 1$, pelo que o único ponto crítico de f é $x = e$. Além disso, $f'(x) < 0$ para $x < e$, e $f'(x) > 0$ para $x > e$. Logo f é decrescente em $]0,1[\cup]1,e[$ e crescente em $]e,+\infty[$, tendo um mínimo em $x = e$.

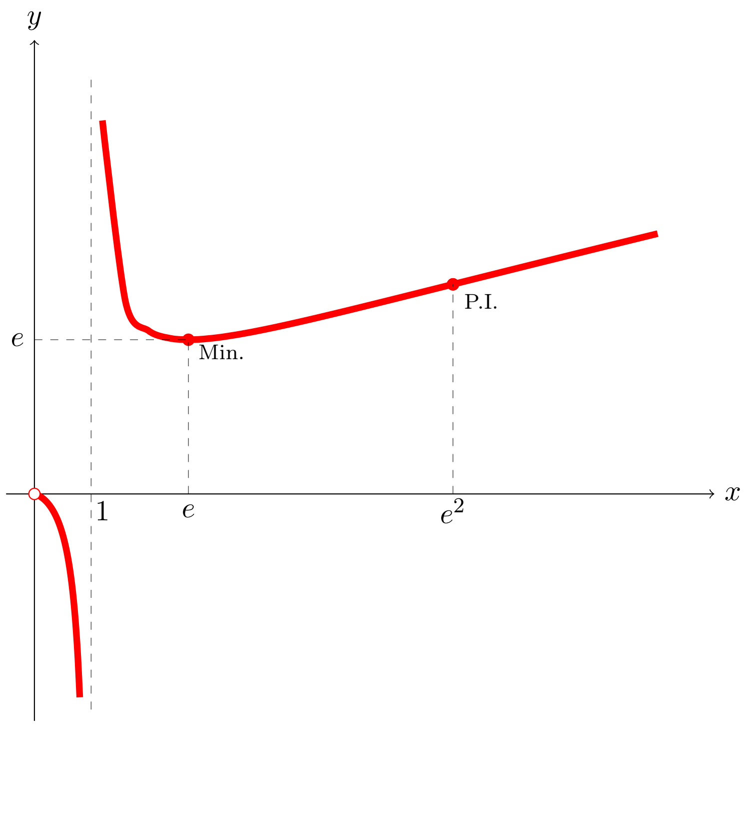
5. *Pontos de inflexão e concavidades.*

Tem-se $f''(x) = \dfrac{2 - \log x}{x(\log x)^3} = 0 \Leftrightarrow \log x = 2$, pelo que f tem um ponto de inflexão $x = e^2$. Além disso, tem-se

- $2 - \log x > 0$ para $x < e^2$, e $2 - \log x < 0$ para $x > e^2$.
- $(\log x)^3 > 0$ para $x > 1$ e $(\log x)^3 < 0$ para $x < 1$.

Logo $f'' < 0$ em $]0, 1[\cup]e^2, +\infty[$ (onde f tem concavidade virada para baixo) e $f'' > 0$ em $]1, e^2[$ (onde f tem concavidade virada para cima).

6. *Esboço do gráfico.*



1.6 Primitivas

Nesta secção vamos considerar as funções definidas num intervalo aberto I.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo I. Chamamos **primitiva de** f (em I) a uma função derivável $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo o $x \in I$. Denotamos,

$$F = \mathrm{P}\, f = \int f.$$

Exemplos

1. $\mathrm{P}\, 1 = x$.
2. $\mathrm{P}\, k = kx$ $(k \in \mathbb{R})$.
3. $\mathrm{P}\, x = \dfrac{x^2}{2}$.
4. $\mathrm{P}\, x^2 = \dfrac{x^3}{3}$.
5. $\mathrm{P}\, x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.
6. $\mathrm{P}\, \dfrac{1}{x} = \ln x$ (em $\mathbb{R}^+$).

Notas:

- Todas as funções contínuas definidas em I são primitiváveis em I.
- Duas primitivas de uma função num intervalo diferem de uma constante, isto é, se F e G são duas primitivas de uma mesma função f num intervalo I, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $G = F + k$ em I. Por outras

palavras, a família de funções,

$$F + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

constitui a família de todas as primitivas de f (em I).

- Se f é primitivável num intervalo I, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única função F definida em I tal que $F = \mathrm{P}\, f$, e $F(x_0) = y_0$.

Exemplo

A família de funções,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + k, \qquad k \in \mathbb{R},$$

constitui a família de todas as primitivas de $f(x) = x$ em $\mathbb{R}$. No entanto, a única primitiva de f que verifica a condição $F(2) = 4$ é

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2.$$

De facto, $F(2) = \dfrac{x^2}{2} + k = 4 \Rightarrow k = 2$.

Primitivas imediatas

A partir da tabela de derivadas dada anteriormente obtemos as seguinte tabela de primitivas:

$\mathrm{P}\, k = kx$	
$\mathrm{P}\, x^{\alpha} = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathrm{P}\, f' f^{\alpha} = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathrm{P}\, \dfrac{1}{x} = \ln\lvert x\rvert$	$\mathrm{P}\, \dfrac{f'}{f} = \ln\lvert f\rvert$
$\mathrm{P}\, e^x = e^x$	$\mathrm{P}\, f' e^f = e^f$
$\mathrm{P}\, \sin x = -\cos x$	$\mathrm{P}\, f' \sin f = -\cos f$
$\mathrm{P}\, \cos x = \sin x$	$\mathrm{P}\, f' \cos f = \sin f$
$\mathrm{P}\, \mathrm{tg}\, x = -\ln\lvert \cos x\rvert$	$\mathrm{P}\, f' \mathrm{tg}\, f = -\ln\lvert \cos f\rvert$
$\mathrm{P}\, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$	$\mathrm{P}\, \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} = \arcsin f$
$\mathrm{P}\, \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$	$\mathrm{P}\, \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} = \arccos f$
$\mathrm{P}\, \dfrac{1}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x$	$\mathrm{P}\, \dfrac{f'}{1+f^2} = \mathrm{arctg}\, f,$

$(k \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1)$.

Exemplos

1. $\mathrm{P}\, x \cos x^2 = \mathrm{P}\, \frac{1}{2}(2x)\cos x^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,(2x)\cos x^2 \overset{P f'\cos f}{=\!=} \frac{1}{2}\sin x^2.$

2. $\mathrm{P}\, \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x} = \mathrm{P}\left(-\dfrac{-1}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x} = -\mathrm{P}\,\dfrac{-1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x} \overset{P f'\sin f}{=\!=} -\left(-\cos\dfrac{1}{x}\right) = \cos\dfrac{1}{x}.$

3. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} = \mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{1+(e^x)^2} \overset{P \frac{f'}{1+f^2}}{=\!=} \mathrm{arctg}\, e^x.$

4. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{1+e^x} \overset{P \frac{f'}{f}}{=\!=} \ln\, e^x.$

5. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} = \mathrm{P}\, e^x(1+e^x)^{-\frac{1}{2}} \overset{P f' f^{-1/2}}{=\!=} \dfrac{(1+e^x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2(1+e^x)^{\frac{1}{2}}.$

6. $\mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \mathrm{P}\, \dfrac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \overset{P \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}}{=\!=} \arcsin e^x.$

7. $\mathrm{P}\,\dfrac{\cos x}{\sin x} \overset{P\,\frac{f'}{f}}{=\!=\!=} \ln|\sin x|.$

8. $\mathrm{P}\,\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \mathrm{P}\,\cos x \sin^{-2} x \overset{P\,f'f^{-2}}{=\!=\!=} \dfrac{\sin^{-1} x}{-1} = -\dfrac{1}{\sin x}.$

9. $\mathrm{P}\,\cos x \sin^2 x \overset{P\,f'f^{2}}{=\!=\!=} \dfrac{\sin^3 x}{3}.$

10. $\mathrm{P}\,\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x} = \mathrm{P}\,\dfrac{1}{x}\sqrt{1+\ln x} \overset{P\,f'f^{\frac{1}{2}}}{=\!=\!=} \dfrac{(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}.$

11. $\mathrm{P}\,\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)} = \mathrm{P}\,\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\ln^2 x} \overset{P\,\frac{f'}{1+f^2}}{=\!=\!=} \operatorname{arctg}(\ln x).$

12. $\mathrm{P}\,\dfrac{1}{x(1+\ln x)} = \mathrm{P}\,\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\ln x} \overset{P\,\frac{f'}{f}}{=\!=\!=} \ln|\ln x|,$

onde $k \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$.

Regras de primitivação

A partir da regras de derivação da soma, produto e composição de funções, deduzem-se sem dificuldade as seguintes regras de primitivação.

Primitivação da soma

Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são funções primitiváveis num intervalo I, então

1. $f + g$ é primitivável em I e tem-se

$$\mathrm{P}\,(f+g) = \mathrm{P}\,f + \mathrm{P}\,g.$$

2. kf $(k \in \mathbb{N})$ é primitivável em I e tem-se

$$\mathrm{P}\,(kf) = k\,\mathrm{P}\,f.$$

Exemplos

1. $\mathrm{P}\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)=\mathrm{P}\,x^2+\mathrm{P}\,\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^3}{3}+\ln|x|.$

2. $\mathrm{P}\left(4\cos x-\dfrac{3}{1+x^2}\right)=4\,\mathrm{P}\,\cos x-3\,\mathrm{P}\,\dfrac{1}{1+x^2}=4\sin x-3\,\mathrm{arctg}\,x.$

Primitivação por partes

Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções definidas num intervalo I, com f primitivável e g derivável. Então $fg : I \to \mathbb{R}$ é primitivável, tendo-se

$$\mathrm{P}\,(fg) = Fg - \mathrm{P}\,(Fg'),$$

sendo $F = \mathrm{P}\,f$.

- A primitivação por partes aplica-se usualmente para primitivar produtos de funções polinomiais, exponenciais, logarítmo, funções trigonométricas e respectivas inversas. Neste método, a escolha da função a primitivar e da função a derivar não é, em geral, indiferente. Na seguinte tabela são sugeridas as funções a primitivar e a derivar nalgumas situações que aparecem frequentemente na prática.

	primitivar	derivar
polin $\times$ sin / cos / exp	sin / cos / exp	polin.
polin $\times$ ln	polin	ln
exp $\times$ sin / cos	exp ou sin / cos	sin / cos ou exp
ln /arcsin/arctg	1	ln /arcsin/arctg

Exemplos

1. $\mathrm{P}\,\underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{e^x}_{f}=\underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{e^x}_{F}-\mathrm{P}\,\underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{e^x}_{F}=xe^x-Pe^x=x\,e^x-e^x.$

2. $\mathrm{P}\,\underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{\ln x}_{g}=\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F}\cdot\underbrace{\ln x}_{g}-\mathrm{P}\,\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\mathrm{P}\,x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}.$

3. $\mathrm{P}\,\ln x=\mathrm{P}\,\underbrace{1}_{f}\cdot\underbrace{\ln x}_{g}=\underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\ln x}_{g}-\mathrm{P}\,\underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}=x\ln x-\mathrm{P}\,1=x\ln x-x.$

4. $\mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{f}\cdot\underbrace{\sin x}_{g}=\underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{\sin x}_{g}-\mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{\cos x}_{g'}\overset{(*)}{=\!=}e^x\sin x-(e^x\cos x+\mathrm{P}\,e^x\sin x).$

   Daqui resulta que $2\,\mathrm{P}\,e^x\sin x=e^x\sin x-e^x\cos x$ e portanto que,

$$\mathrm{P}\,e^x\sin x=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}.$$

   (*) $\mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{f}\cdot\underbrace{\cos x}_{g}=\underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{\cos x}_{g}-\mathrm{P}\,\underbrace{e^x}_{F}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{g'}.$

5. $\mathrm{P}\,\mathrm{arctg}\,x=\mathrm{P}\,\underbrace{1}_{f}\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}\,x}_{g}=\underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\mathrm{arctg}\,x}_{g}-\mathrm{P}\,\underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{g'}$

$$=x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{2x}{1+x^2}=x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

6. $\mathrm{P}\,\underbrace{x^2}_{g}\cdot\underbrace{\cos x}_{f}=\underbrace{x^2}_{g}\cdot\underbrace{\sin x}_{F}-\mathrm{P}\,\underbrace{2x}_{g'}\cdot\underbrace{\sin x}_{F}=x^2\sin x-2\Big(-x\cos x-\mathrm{P}\,1(-\cos x)\Big)$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x.$$

Primitivação por substituição

Sejam $f:I\to\mathbb{R}$ uma função primitivável num intervalo I e $\varphi:J\to I$ uma função derivável e injectiva num intervalo J tal que $\varphi(J)=I$. Então

$$\mathrm{P}\,f(x)=\mathrm{P}\,\big[f(\varphi(t))\varphi'(t)\big]\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Exemplos

1. $\mathrm{P}\,\underbrace{\cos\sqrt{x}}_{f(x)} \overset{(1)}{=\!=} \mathrm{P}\,\underbrace{\cos(t)}_{f(\varphi(t))}\,\underbrace{2t}_{\varphi'(t)}\,|_{t=\sqrt{x}} \overset{(2)}{=\!=} 2(t\sin t+\cos t)|_{t=\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}).$

   (1) <u>Substituição efectuada:</u>

$$\left|\begin{array}{l} \sqrt{x}=t=\varphi^{-1}(x), \\ x=t^2=\varphi(t), \\ x'=2t=\varphi'(t). \end{array}\right.$$

   (2) $\mathrm{P}\,2t\cos t = 2\mathrm{P}\,\underbrace{t}_{g}\cdot\underbrace{\cos x}_{f} = 2(\underbrace{t}_{g}\cdot\underbrace{\sin t}_{F} - \mathrm{P}\,\underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\sin t}_{F}) = 2(t\sin t+\cos t)$

2. $$\mathrm{P}\,\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} \overset{(1)}{=\!=} \mathrm{P}\,\frac{1}{t}4t(t^2-1)\Big|_{t=\sqrt{\sqrt{x}+1}} \overset{(2)}{=\!=} 4\,\mathrm{P}\,(t^2-1)\Big|_{t=\sqrt{\sqrt{x}+1}}$$
$$= 4\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{t=\sqrt{\sqrt{x}+1}} = 4\left[\frac{\sqrt{(\sqrt{x}+1)^3}}{3} - \sqrt{\sqrt{x}+1}\right].$$

   (1) <u>Substituição efectuada:</u>

$$\left|\begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{x}+1}=t=\varphi^{-1}(t), \\ \sqrt{x}+1=t^2 \\ \sqrt{x}=t^2-1 \\ x=(t^2-1)^2=\varphi(t) \\ x'=4t(t^2-1)=\varphi'(t) \end{array}\right.$$

3. $$\mathrm{P}\,\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}} \overset{(1)}{=\!=} \mathrm{P}\,\frac{1}{t^2+1}3t^2\Big|_{t=\sqrt[3]{x}} = 3\,\mathrm{P}\,\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\Big|_{t=\sqrt[3]{x}} = 3\mathrm{P}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)$$
$$= 3\,(t-\operatorname{arctg} t)\Big|_{t=\sqrt[3]{x}} = 3\left(\sqrt[3]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\right).$$

   (1) <u>Substituição:</u>

$$\left|\begin{array}{l} x = t^3 = \varphi(t) \\[2ex] x' = 3t^2 = \varphi'(t) \\[2ex] t = \sqrt[3]{x} = \varphi^{-1}(t) \end{array}\right.$$

4. $$\mathrm{P}\,\frac{1}{1+e^x} \overset{(1)}{=\!=} \mathrm{P}\,\frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\Big|_{t=e^x} \overset{(2)}{=\!=} \mathrm{P}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\Big|_{t=e^x} = (\ln|t| - \ln|t+1|)\Big|_{t=e^x}$$
$$= \ln e^x - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1).$$

(1) <u>Substituição:</u>

$$\left|\begin{array}{l} t = e^x = \varphi^{-1}(x) \\[2ex] x = \ln t = \varphi(t) \\[2ex] x' = \frac{1}{t} = \varphi'(t) \end{array}\right.$$

(2) A função $\dfrac{1}{(t+1)t}$ é uma função racional própria, isto é, um quociente de polinómios cujo grau do denominador é superior ao do numerador. Como o denominador apenas admite as raízes simples $t = 0$ e $t = -1$, garante-se que existem números reais $A, B \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t}.$$

Para determinar A, B, começamos por reduzir a expressão ao mesmo denominador

$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(t+1)}{(t+1)t}.$$

Daqui conclui-se que $1 = At + B(t+1)$, isto é que

$$1 = (A+B)t + B.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, tem-se então

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Logo,

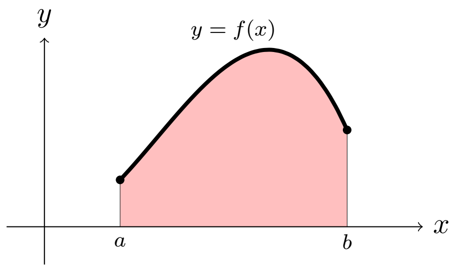
$$\frac{1}{(t+1)t}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}.$$

1.7 Cálculo integral

Consideremos uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$ em $[a, b]$. Pretende-se calcular a área da região $\mathcal{R}$ delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos xx,

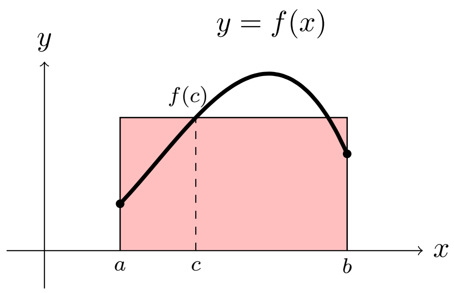
$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x) \right\},$$

que se encontra assinalada na seguinte figura.



O cálculo da área de $\mathcal{R}$ não é trivial.

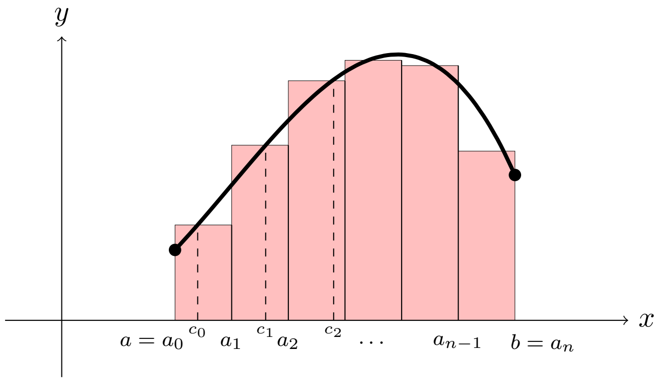
Podemos começar por calcular uma aproximação para o valor da área de $\mathcal{R}$ calculando a área de um rectângulo de base $b - a$ e de altura $f(c)$, $c \in [a, b]$.



Nessa altura,

$$\text{área } \mathcal{R} \;\approx\; f(c)(b - a).$$

De modo a melhorar a aproximação podemos subdividir o intervalo $[a, b]$ em n intervalos de igual amplitude $h = (b - a)/n$, $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, e calcular a área de n rectângulos de base h e altura $f(c_i)$, $c_i \in [a_i, a_{i+1}]$.



Assim,

$$\text{área } \mathcal{R} \;\approx\; f(c_1)h + \cdots + f(c_n)h.$$

Intuitivamente a aproximação será tanto melhor quanto mais pequena for a amplitude h dos intervalos, ou seja, quanto maior for o número de intervalos. De facto, pode-se mostrar que,

$$\text{área } \mathcal{R} \;=\; \lim_{h \to 0} (f(c_1)h + \cdots + f(c_n)h).$$

A este valor chamamos *integral* (definido) de f no intervalo $[a, b]$ que se representa por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

A função $f(x)$ designa-se por *função integranda* e a, b designam-se por *extremos de integração.*

A noção de integral pode ser estendida para qualquer função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Propriedades do integral

Sejam $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $c \in [a, b]$.

Tem-se:

- *Linearidade do integral:*
  1. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
  2. $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$
- *Monotonia do integral:* se $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in I$ tem-se,

$$\int_a^b f(x)\, dx \;\geq\; \int_a^b g(x)dx.$$

- *Aditividade do integral:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Por convenção tem-se ainda:

- $\int_a^a f(x)\, dx = 0,$
- $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx = 0.$

Exemplos

1. Sabendo que
$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{e que} \quad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$
obtemos pelas propriedades anteriores
$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+5x^2)\,dx &= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 5x^2\,dx \\ &= \int_0^1 x\,dx + 5\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2}+\frac{5}{3} = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

2. Pretende-se comparar os integrais $\int_0^1 x^2\,dx$ e $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ sem os determinar. Ora, como a função $\sqrt{x} \geq x^2$ em $[0,1]$, vem pela monotonia do integral que
$$\int_0^1 x^2\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$

Para calcular integrais tem-se a seguinte fórmula, conhecida por *fórmula fundamental do cálculo integral* ou *fórmula de Barrow* que relaciona o conceito de integral que envolve a noção de área e o conceito de primitiva, que envolve a noção de derivada.

Teorema Sejam $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Então
$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k\int_a^b 1\,dx = k[x]_a^b = k(b-a)$.

2. $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

3. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{x+1}\,dx$.

   Recordemos que $P\,f'f^\alpha = \dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_2^6 \sqrt{x+1}\,dx &= \int_2^6 (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^6 \\ &= \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6 = \frac{2}{3}(7^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}).\end{aligned}$$

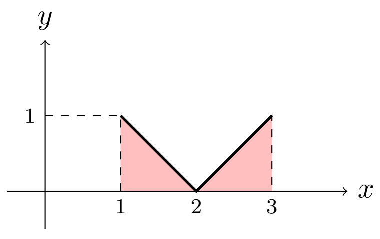
4. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^3 e^{-x}dx$.

   Recordando que $P\,(f'e^f) = e^f$, vem

$$\int_1^3 e^{-x}dx = -\int_1^3 -e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_1^3 = -(e^{-3} - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-3}.$$

5. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^3 |2-x|\,dx$.

   Tem-se $|2-x| = \begin{cases} 2-x, & 2-x \geq 0 \\ x-2, & 2-x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \\ x-2, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.



Assim

$$\begin{aligned}\int_1^3 |2-x|\,dx &= \int_1^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 \\ &= (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2-4) = 1.\end{aligned}$$

6. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

   Primitivando por partes vem

$$P\,1\cdot\ln x = x\,\ln x - P\,x\,\frac{1}{x} = x\,\ln x - x = x(\ln x - 1),$$

   e portanto,

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x(\ln x - 1)]_1^e = e(1-1) - (-1) = 1.$$

7. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

   Recordando que $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ e que $P\,f'\,f = \dfrac{1}{2}f^2$ obtemos

$$P\,\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = P\,\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x.$$

   Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}^2 1 - \operatorname{arctg}^2 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

8. Pretende-se calcular $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}$.

Recordando que $P\frac{f'}{f} = \ln|f|$,

$$P\,\frac{1}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} = P\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x} = \log|\operatorname{arctg} x|,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} &= \Big[\log|\operatorname{arctg} x|\Big]_1^{\sqrt{3}} = \log|\operatorname{arctg}\sqrt{3}| - \log|\operatorname{arctg} 1| \\ &= \log\frac{\pi}{3} - \log\frac{\pi}{4} = \log\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

9. Pretende-se calcular, $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Recordando que $(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, e que

$$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\,f' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}},$$

vem

$$P\,\frac{x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2,$$

e portanto,

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arcsen} x^2\Big]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right) = 0.$$

10. Pretende-se calcular, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4}$.

A função $\dfrac{1}{x^2-4}$ é uma função racional própria pois é um quociente de dois polinómios, sendo que o grau do denominador superior ao do numerador. O polinómio x^2-4 tem duas raízes simples $-2, 2$ e portanto admite a factorização $x^2-4=(x+2)(x-2)$. Assim existem constantes reais A, B tais que

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-4} &= \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2(A-B)}{x^2-4},\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(A-B)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Daqui resulta que

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}\right] dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}\Big[\log|x-2| - \log|x+2|\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{4}(\log 1 - \log 3 - \log 3 + \log 1) = -\frac{\log 3}{2}.\end{aligned}$$

Integração por substituição

Seja $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, J um intervalo de extremos α e β e $\varphi : J \to I$ uma função com derivada contínua tal que $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$. Então,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Exemplos

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_1^e \frac{t}{1+t}\frac{1}{t}dt = \int_1^e \frac{1}{1+t}dt = \Big[\ln|t+1|\Big]_1^e = \ln(1+e) - \ln(2).$

   Substituição efectuada:

   $$\left|\begin{array}{l} t = e^x \\ \\ x = \ln t = \varphi(t) \\ \\ \varphi'(t) = \frac{1}{t} \\ \\ x = 0 \Rightarrow t = e^x = e^0 = 1 \\ \\ x = 1 \Rightarrow t = e^x = e^1 = e \end{array}\right.$$

2. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^e \frac{\ln t}{t}2t\,dt = 2\Big[t(\ln(t)-1)\Big]_1^e = 2\int_1^e \ln t\,dt = 2\Big[t(\ln(t)-1)\Big]_1^e = 2.$

   O cálculo da primitiva de $\ln t$ faz-se por partes (exercício).

   Substituição efectuada:

   $$\left|\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \\ x = t^2 = \varphi(t) \\ \\ \varphi'(t) = 2t \\ \\ x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1 \\ \\ x = e^2 \Rightarrow t = \sqrt{x} = \sqrt{e^2} = e \end{array}\right.$$

Aplicações do cálculo integral

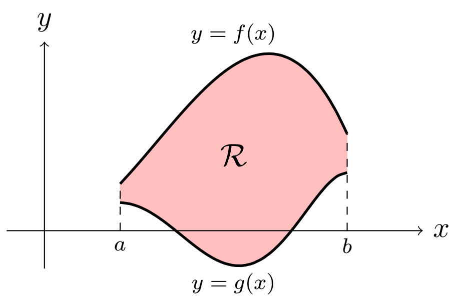
- Cálculo de áreas.
- Cálculo de volumes de sólidos de revolução.
- Cálculo de comprimentos de arco.

Cálculo de áreas

Teorema Sejam $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $f(x) \geq g(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. A área da região

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

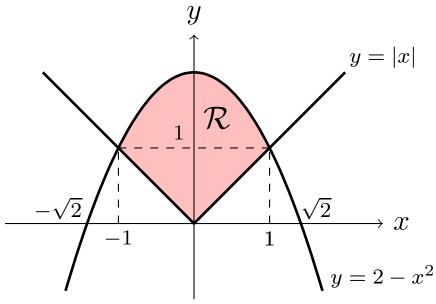
é dada pelo integral $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.



Se o sinal de $f - g$ não for constante no intervalo $[a, b]$ temos que determinar os pontos onde os gráficos de ambas as funções se intersectam e decompôr o intervalo em subintervalos onde esse sinal se mantenha constante. O valor da área será então a soma das áreas associadas a cada um desses subintervalos.

Exemplos

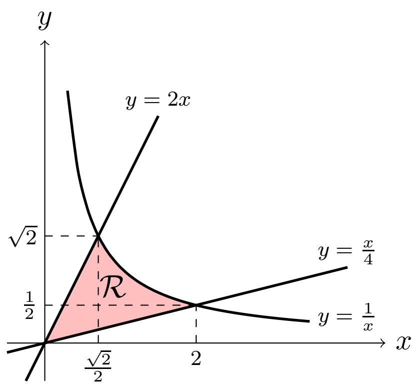
1. Calcular a área da região delimitada por $y = |x|$ e $y = 2 - x^2$.



$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_{-1}^{1} ((2 - x^2) - |x|)dx \\
&= \int_{-1}^{0} ((2 - x^2) - (-x))dx + \int_{0}^{1} ((2 - x^2) - x)dx \\
&= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \\
&= -(2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}) + (2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{7}{3}.
\end{aligned}
$$

2. Pretende-se calcular a área da região

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \ : \ 0 \le y \le \frac{1}{x}, \ \frac{x}{4} \le y \le 2x, \right\}.$$



Para isso necessitamos de determinar os pontos de intersecção dos gráficos de cada uma das funções. Ora, a intersecção da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ com a recta $y = 2x$ obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ \frac{1}{x} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ x^2 = 2. \end{cases}$$

Como $y \geq 0$ obtemos o ponto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$. Analogamente a intersecção da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ com a recta $y = \frac{x}{4}$ obtém-se resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ \frac{1}{x} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ \\ x^2 = 4. \end{cases}$$

Como $y \geq 0$ obtemos o ponto $(2, \frac{1}{2})$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{x}{4}\right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right) dx \\ &= \frac{7}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\log|x| - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = \cdots \end{aligned}$$

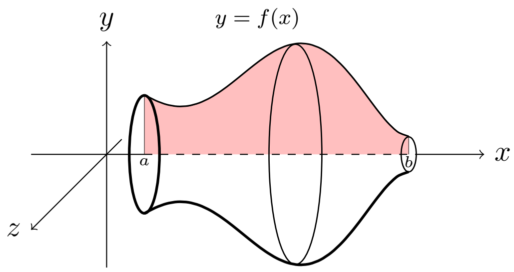
Cálculo de volumes de sólidos de revolução

Vejamos agora como calcular o *volume de sólidos de revolução* usando o integral definido.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ o sólido de revolução em torno do eixo do xx definido por f, i.e., o volume da região definida por rotação da área

$$\{(x, y) \,:\, a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\},$$

em torno do eixo do xx.

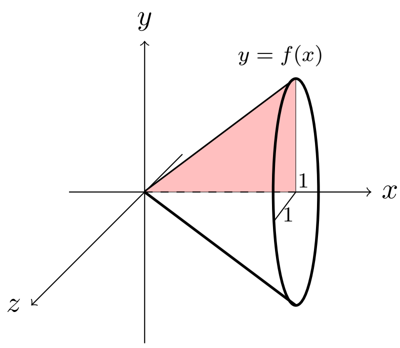


Teorema O volume do sólido de revolução definido por $y = f(x)$ é dado pela fórmula,

$$V = \int_a^b \pi\, f^2(x)\, dx.$$

Exemplo

Pretende-se calcular o volume do cone de altura $h = 1$ e cuja base é uma disco de raio $R = 1$. O cone é o sólido de revolução definido pela função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.



O volume do cone é dado por

$$V = \int_0^1 \pi\, x^2\, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

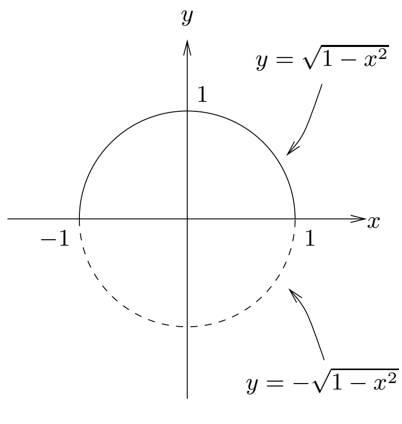
Cálculo de comprimentos de arco

Vejamos por último como calcular o *comprimento de arco* (ou *comprimento de linha*) para curvas definidas como gráficos de funções. Intuitivamente o comprimento de arco de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ representa o comprimento de uma linha de expessura nula que é sobreposta ao gráfico de f entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Teorema Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função com derivada contínua em $[a, b]$, o comprimento de arco de $f(x)$ entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dado por

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Exemplo Pretende-se calcular o perímetro de uma circunferência de raio 1 de equação $x^2 + y^2 = 1$. Esta equação determina duas semi-circunferências, uma situada no semi-plano superior de equação $y = \sqrt{1 - x^2}$ e outra situada no semi-plano inferior de equação $y = -\sqrt{1 - x^2}$. O perímetro da cirunferência obtém-se duplicando o comprimento de arco de $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ entre os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ (ver a seguinte figura).



O perímetro da semi-circunferência é dado por

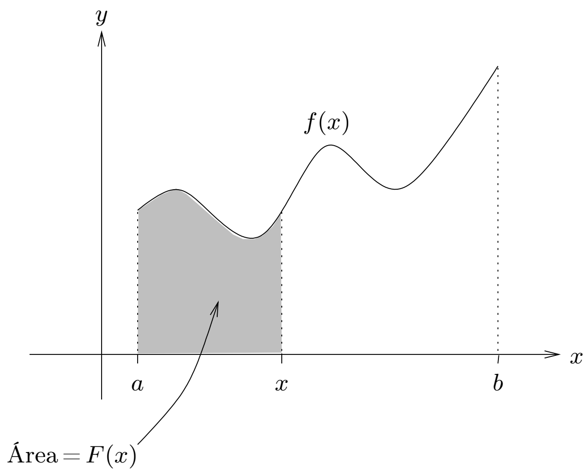
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1+[f(x)']^2}\,dx &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \Big[\arcsin x\Big]_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.
\end{aligned}$$

Logo o perímetro da circunferência de raio 1 é 2π.

Integral indefinido

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Chama-se *integral indefinido de f* (com origem em $x = a$) à função

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b]$$



Exemplos

1. Se $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, então $F(x) = \int_0^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$.

2. Seja $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 3, \\ -1, & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$

   Seja $F(x)$ o integral indefinido de $f(x)$. Vamos determinar uma expressão analítica para $F(x)$.

Por definição temos $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt$, $x \in [0,4]$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \begin{cases} \int\limits_0^x 2\, dt, & 0 \le x < 1, \\ \\ \int\limits_0^1 2\, dt + \int\limits_1^x 0\, dt, & 1 \le x < 3 \\ \\ \int\limits_0^1 2\, dt + \int\limits_1^3 0\, dt + \int\limits_3^x (-1)\, dt, & 3 \le x \le 4, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1, \\ \\ 2 + 0, & 1 \le x < 3, \\ \\ 2 + 0 + (-x + 3), & 3 \le x \le 4. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1, \\ \\ 2, & 1 \le x < 3, \\ \\ -x + 5, & 3 \le x \le 4. \end{cases}
$$

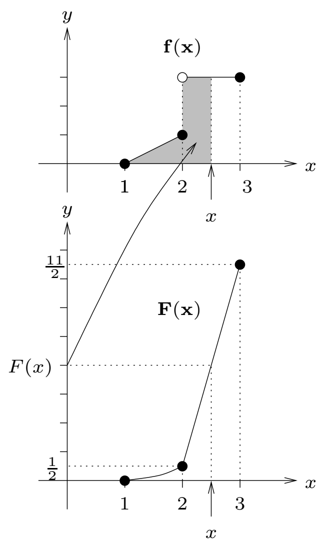
3. Seja $f(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 \le x \le 2, \\ \\ 3, & 2 < x \le 4 \end{cases}$.

Então

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt \;=\; \begin{cases} \int_1^x (t-1)\,dt, & 1\le x\le 2,\\[2ex] \int_1^2 (t-1)\,dt+\int_2^x 3\,dt, & 2<x\le 4,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^x, & 1\le x\le 2,\\[2ex] \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^2+3\Big[t\Big]_2^x, & 2<x\le 4,\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}, & 1\le x\le 2,\\[2ex] \frac{1}{2}+3x-6=3x-\frac{11}{2}, & 2<x\le 4.\end{cases}$$



Nestes exemplos pode-se constatar que o integral indefinido de uma função f é uma função contínua, mesmo que f não o seja. De facto, esta e outras propriedades, muito importantes são verificadas pelo integral indefinido como vamos ver agora.

Teorema Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e seja $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ o integral indefinido de f. Tem-se:

(i) O integral indefinido é uma função contínua em $[a,b]$.

(ii) Se $f(x) \geq 0$ $[f(x) \leq 0]$ para todo o $x \in [a,b]$ então $F(x)$ é uma função crescente [resp. decrescente] em $[a,b]$.

(iii) Se $f(x)$ é uma função contínua em $x_0 \in [a,b]$ então $F(x)$ é uma função derivável em x_0 e tem-se $F'(x_0) = f(x_0)$. Em particular, se $f(x)$ for contínua em $[a,b]$ então $F(x)$ é uma função derivável em $[a,b]$, tendo-se $F'(x) = f(x)$ para todo o $x \in [a,b]$, ou seja, $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$, para todo o $x \in [a,b]$.

A propriedade (iii) significa que se $f(x)$ for contínua em $[a,b]$, $F(x)$ é a única primitiva de $f(x)$ em $[a,b]$ que se anula em $x = a$. Ainda como consequência do teorema anterior obtemos imediatamente a fórmula fundamental do cálculo integral (fórmula de Barrow) dada anteriormente.

O integral indefinido pode ser estendido aos intervalos abertos.

Teorema Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo aberto I. Seja $a \in I$. Consideremos a função $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Então $F(x)$ é uma função derivável em I e tem-se $F'(x) = f(x)$ para todo o x em I.

Chapter 2

Cálculo vectorial e matricial

2.1 Vectores

Chamamos *vector* com n componentes reais ao n-uplo,

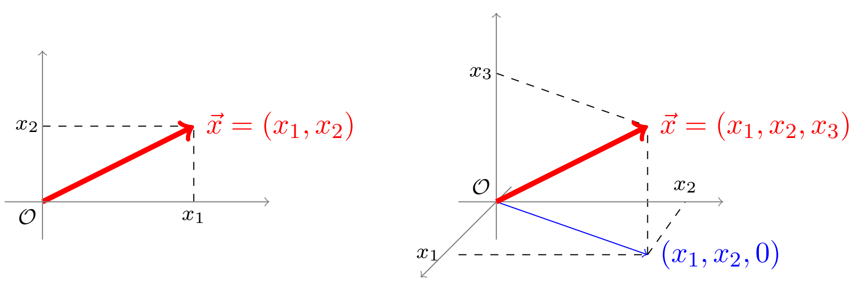
$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\mathbb{R}^n$ denota o produto cartesiano,

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ factores}} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Iremos estar particularmente interessados em vectores com 2 e 3 componentes, i.e., vectores no plano e no espaço.

Representação geométrica de um vector num sistema de eixos coordenados:

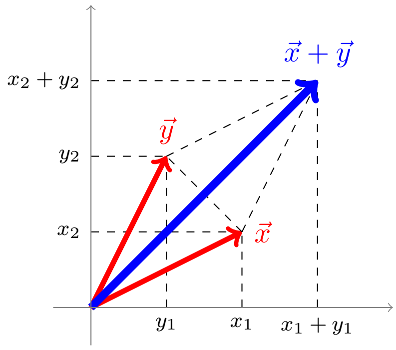


Operações com vectores

- Adição de vectores

  Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ define-se

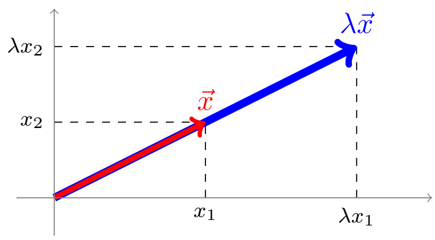
  $$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$



(Regra do paralelogramo)

- Multiplicação de um vector por um escalar

  Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ define-se $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

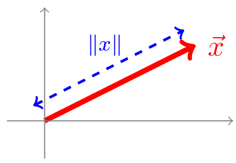


($\lambda = 2$ na figura)

Norma (ou comprimento) de um vector

Dado $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, define-se *norma* de $\vec{x}$ por

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$



Propriedades da norma. Para todos os vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ e escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $\|\vec{x}\| \geq 0$;
- $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$;
- $\|\vec{x} \pm \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Desigualdade triangular).

Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se *unitário* se $\|\vec{v}\| = 1$. Dado um vetor não nulo, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, define-se *versor* de $\vec{x}$, $\text{vers}(\vec{x})$, como sendo o único vetor unitário com a mesma direção e sentido que $\vec{x}$. Daqui resulta que $\text{vers}(x) = \alpha \vec{x}$ com $\alpha > 0$ tal que $\|\alpha \vec{x}\| = \alpha \|\vec{x}\| = 1$. Logo $\alpha = \dfrac{1}{\|\vec{x}\|}$ e portanto,

$$\text{vers}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

Por exemplo, se $\vec{x} = (3, 4)$, $\|(3, -4)\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ e tem-se

$$\text{vers}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Dizemos que *normalizámos* o vetor $\vec{x}$.

Distância entre $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ é

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Produto interno

Dados $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, define-se *produto interno* (ou *produto escalar*) de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ por

$$\vec{x}|\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Propriedades do produto interno. Para todos os vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ e para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $\vec{x}|\vec{y} = \vec{y}|\vec{x}$;
- $\vec{x}|(\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x}|\vec{y} + \vec{x}|\vec{z}$;
- $\lambda(\vec{x}|\vec{y}) = (\lambda\vec{x})|\vec{y} = \vec{x}|(\lambda\vec{y})$;

As propriedades anteriores decorrem imediatamente das propriedades análogas verificadas para o produto de números reais e mostram que ambos os produtos se operam de modo semelhante. Por exemplo, os casos notáveis da multiplicação em $\mathbb{R}$,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

'transcrevem-se" para o produto interno como,

$$(\vec{x} \pm \vec{y})|(\vec{x} \pm \vec{y}) = \vec{x}|\vec{x} \pm 2\vec{x}|\vec{y} + \vec{y}|\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 \pm 2\vec{x}|\vec{y} + \|\vec{y}\|^2,$$

e

$$(\vec{x} - \vec{y})|(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x}|\vec{x} - \vec{y}|\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2.$$

Vamos agora ver como a noção de produto interno permite definir rigorosamente as noções de *comprimento*, *ortogonalidade* e *ângulo*.

Produto interno e norma

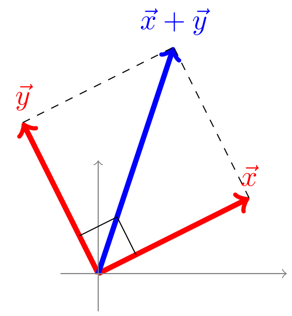
Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, tem-se $\|\vec{x}\|2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \vec{x}|\vec{x}$, ou seja,

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}|\vec{x}}}$$

Produto interno e ortogonalidade

Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Tem-se:

- $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})|(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}|\vec{x} + \vec{y}|\vec{y} + 2\,\vec{x}|\vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\vec{x}|\vec{y}$.
- Se $\vec{x} \perp \vec{y}$ tem-se também $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ (Teo. de Pitágoras).



Assim

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,x|y = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \Leftrightarrow 2\,x|y = 0 \Leftrightarrow x|y = 0,$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{x}|\vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}.}$$

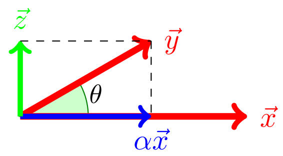
Produto interno, ângulo de vectores e projeção ortogonal

Para definir ângulo entre 2 vetores consideremos vectores não nulos $\vec{x}$ e $\vec{y}$ e a *projeção ortogonal* de $\vec{y}$ sobre o vetor $\vec{x}$, $\mathrm{proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \alpha\vec{x}$. Suponhamos ainda $\alpha > 0$.

Tem-se,

- $\cos\theta = \dfrac{\|\alpha\vec{x}\|}{\|y\|} \Leftrightarrow \|\alpha\vec{x}\| = \|\vec{y}\|\cos\theta$;

- $\vec{y} = \alpha\vec{x} + \vec{z}$ para algum $\vec{z} \perp \vec{x}$.



Assim,

$$
\begin{aligned}
\vec{x}|\vec{y} &= \vec{x}|(\alpha\vec{x} + \vec{z}) \\
&= \alpha(\vec{x}|\vec{x}) + \underbrace{\vec{x}|\vec{z}}_{0} \\
&= \alpha\|\vec{x}\|\,\|\vec{x}\| \qquad (2.1)\\
&= \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\cos\theta \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Logo, de (2.2) e (2.1) obtém-se respetivamente,

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\
\alpha &= \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|^2}
\end{aligned}
$$

A fórmula anterior é também válida quando $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, isto é, quando $\alpha \leq 0$ (a dedução faz-se de modo análogo).

Assim, dados vetores não nulos, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, define-se *ângulo* entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como

$$
\boxed{\theta \in [0,\pi] \qquad \text{tal que} \qquad \cos(\theta) = \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}}
$$

e tem-se para a projeção ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\vec{x}$, $\mathrm{proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \alpha\vec{x}$,

$$\boxed{\mathrm{proj}_{\vec{x}}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}|\vec{x}}{\vec{x}|\vec{x}}\,\vec{x}.}$$

Em geral dada uma reta r que passa na origem e um vetor $\vec{y}$, define-se a *projeção ortogonal* de $\vec{y}$ sobre r como sendo

$$\boxed{\mathrm{proj}_{r}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}|\vec{x}}{\vec{x}|\vec{x}}\,\vec{x},}$$

onde $\vec{x}$ é um qualquer vetor director da reta. O vetor $\mathrm{proj}_r(\vec{y})$ é o vetor da reta que se encontra mais próximo de $\vec{y}$. Define-se *distância* de $\vec{y}$ à reta r como sendo distância de $\vec{y}$ a $\mathrm{proj}_r(\vec{y})$, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{dist}(\vec{y}, r) = \|\vec{y} - \mathrm{proj}_{\vec{x}}(\vec{y})\|.}$$

Exemplo

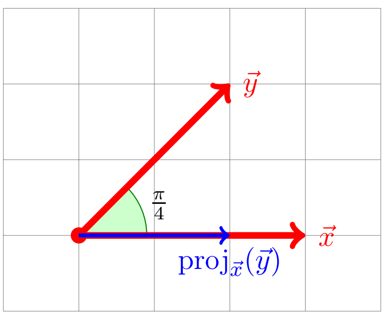
Sejam $\vec{x} = (3,0)$ e $\vec{y} = (2,2)$. O ângulo formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$ é único $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}|\vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} = \frac{(3,0)|(2,2)}{\|(3,0)\|\,\|(2,2)\|} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo $\theta = \frac{\pi}{4}$.

A projeção ortogonal de $\vec{y}$ sobre $\vec{x}$ vem dada por

$$\mathrm{proj}_r(\vec{y}) = \frac{\vec{y}|\vec{x}}{\vec{x}|\vec{x}}\,\vec{x} = \frac{(2,2)|(3,0)}{(3,0)|(3,0)}\,(3,0) = (2,0).$$



A distância de $\vec{y}$ à reta definida por $\vec{x}$ vem dada por,

$$\text{dist}(\vec{y}, r) = \|\vec{y} - \text{proj}_{\vec{x}}(\vec{y})\| = \|(2,2) - (2,0)\| = 2.$$

Distância de um vetor a um plano

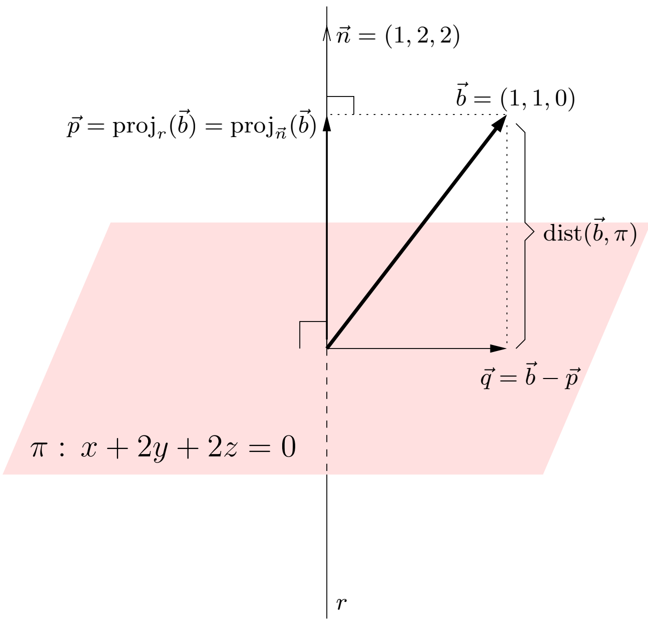
Podemos aplicar a projeção ortogonal para calcular a distância de um vetor (ou ponto) $\vec{b}$ a um plano π que passa na origem de equaçaão cartesiana $ax + by + cz = 0$.

A distância de $\vec{b}$ a π é então dada pela norma da projeção de $\vec{b}$ sobre o vetor normal ao plano $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$\text{dist}(\vec{b}, \pi) = \|\text{proj}_{\vec{n}}(\vec{b})\| = \left\| \frac{\vec{b}|\vec{n}}{\vec{n}|\vec{n}} \vec{n} \right\|.$$

Por exemplo a distância de $\vec{b} = (1,1,0)$ ao plano π de equação $x + 2y + 2z = 0$, vem dada por

$$\|\text{proj}_{(1,2,2)}(1,1,0)\| = \left\| \frac{(1,1,0)|(1,2,2)}{(1,2,2)|(1,2,2)}(1,2,2) \right\| = \frac{1}{3}\|(1,2,2)\| = 1.$$



Se π não passar na origem, basta determinar um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ arbitrário de π, efectuar a mudança de variável $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$ e $\tilde{z} = z - z_0$, ou seja, substituir na equação de π, x por $\tilde{x} + x_0$, y por $\tilde{y} + y_0$ e z por $\tilde{z} + z_0$, e calcular a distância de $\vec{b} - P_0$ ao plano $\tilde{\pi}$ que passa na origem e é definido pelas novas coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

2.2 Matrizes e sistemas de equações lineares

Matrizes

Uma *matriz* A do tipo $m \times n$ é uma coleção de mn elementos de $\mathbb{R}$, a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, dispostos em m linhas e n colunas,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denota-se $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, onde a_{ij} é o elemento de A que se encontra na linha i e coluna j de A.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

é uma matriz do tipo 2×3, tal que

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 4, \quad a_{13} = 3, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -3.$$

Se $a_{ij} = 0$ para todo o i, j, A diz-se a matriz *nula* (do tipo $m \times n$) e denota-se $\mathbf{0}_{m \times n}$.

Matriz coluna e matriz linha

- Se $n = 1$ A diz-se uma *matriz-coluna ou vetor*. Nessa altura,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m\times 1} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 30 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (1, -2, 30) \in \mathbb{R}^3.$$

- $m = 1$, A diz-se uma *matriz-linha*. Nessa altura,

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{bmatrix}_{1\times n}.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 4}.$$

Matriz quadrada

Matriz quadrada (de ordem n) é uma matriz do tipo $n \times n$.

Chamamos *diagonal principal* de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ aos elementos da forma a_{11}, a_{22},..., a_{nn}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Dizemos que A é *diagonal* se forem nulos todos os elementos fora da diagonal principal, ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo o i, j tal que $i \neq j$. Nessa altura A denota-se também por

$$\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}).$$

Exemplo

$$A = \mathrm{diag}(-1, 1, 3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Chama-se matriz *escalar* a uma matriz diagonal em que todos os elementos da diagonal principal são iguais entre si:

$$\mathrm{diag}(\alpha, \ldots, \alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Se $\alpha = 1$ a matriz escalar chama-se *matriz identidade de ordem n*,

$$I_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Transposição de matrizes

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$ define-se a matriz A^T do tipo $n \times m$, chamada *transposta* de A, cujas linhas são as colunas de A, escritas pela mesma ordem.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 4} , \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

Uma matriz quadrada A tal que $A = A^T$ diz-se *simétrica*.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} \text{ é simétrica se e só se } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \alpha & 3 & -3 \\ \beta & \gamma & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 4 & 3 & \gamma \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

isto é, se e só se $\alpha = 4$, $\beta = 2$ e $\gamma = -3$.

Operações algébricas com matrizes

As operações algébricas para matrizes generalizam as operações algébricas, *adição*, *produto por um escalar* e *produto interno* bem conhecidas para vetores.

Adição de matrizes

Dadas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo $m \times n$ define-se a matriz $A + B$ do tipo $m \times n$, em que o elemento que está na posição (i, j) é a soma do elemento na posição (i, j) de A com o elemento na posição (i, j) de B, ou seja, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 20 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 4},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & 3 & 16 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 17 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Produto de uma matriz por um escalar

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se a matriz λA do tipo $m \times n$, obtida mulitplicando todos os elementos da matriz A por λ, ou seja, $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

Exemplos

- $100 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 100 & 200 & -100 & 400 \\ 200 & 300 & -400 & 500 \\ 0 & 500 & 100 & 700 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$

- $\alpha I_n = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$

Produto de matrizes

Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas* se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Dadas matrizes *encadeadas*,

$$A = [a_{ij}], \qquad \text{do tipo } m \times n,$$

$$B = [c_{jk}], \qquad \text{do tipo } n \times p,$$

define-se a matriz produto

$$AB = C = [c_{ik}], \qquad \text{do tipo } m \times p,$$

onde $c_{ik} = (\text{linha } i \text{ de } A) \,|\, (\text{coluna } k \text{ de } B)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 10 & 0 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} -6 & 14 & 14 \\ -1 & 70 & -26 \\ -103 & 37 & \boxed{-3} \\ -5 & 70 & -10 \\ -29 & 7 & -9 \end{bmatrix}_{5\times 3}$$

$$(c_{33} = (10, 0, -3, 5)|(0, -5, 1, 0) = -3)$$

Propriedades das operações com matrizes

Dadas matrizes A, B, C e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se, (**sempre que as operações façam sentido**):

- $A + B = B + A$;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- $A + \mathbf{O} = A$ (elemento neutro da adição);
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $A(B + C) = AB + AC$;
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B$;
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- $AI = IA = A$ (elemento neutro da multiplicação).
- $(AB)^T = B^T A^T$.

O produto de matrizes não verifica algumas propriedades importantes, bem conhecidas dos números reais:

- O produto de matrizes **não é comutativo** (em geral): dadas matrizes quadradas A e B da mesma ordem, podemos ter

  $$AB \neq BA.$$

  De facto, basta considerar, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se

  $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

- **Não é válida a lei do anulamento do produto**: se A e B são matrizes encadeadas,

  $$AB = \mathbf{O} \quad \not\Rightarrow \quad (A = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad B = \mathbf{O}).$$

De facto, basta considerar $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $AB = 0_{2\times 1}$ (verfique!).

- **Não é válida a lei do corte**: dadas matrizes A, B e C,

$$AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C.$$

De facto, basta considerar $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $AB = AC$ com $B \neq C$ (verifique!).

Transformações geométricas no plano e no espaço

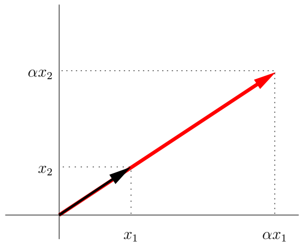
Vamos agora ver alguns exemplos de transformações **geométricas** no plano e no espaço que podem ser definidas usando o produto de matrizes. Estas transformações designam-se mais geralmente por transformações **lineares**.

Transformações geométricas no plano

- **Homotetias:**

  $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ define uma *homotetia* de razão $\alpha > 0$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}.$$



Se $\alpha > 1$ $[\alpha < 1]$ a homotetia é uma *dilatação* [*contracção*].

- **Simetrias:**
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, define uma *simetria* relativamente ao eixo dos xx:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}.$$

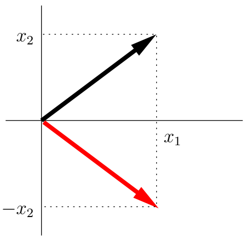
  - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, define uma *simetria* relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

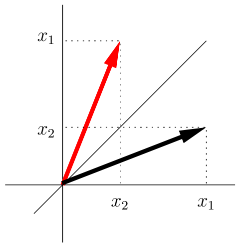
  - Em geral, a matriz

$$A = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 & 2v_1v_2 \\ 2v_1v_2 & v_2^2 - v_1^2 \end{bmatrix},$$

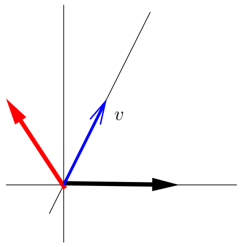
define uma *simetria* relativamente à reta que passa na origem definida pelo vetor diretor $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq \vec{0}$.



simetria relativamente
ao eixo dos xx



simetria relativamente à
bissectriz dos quadrantes ímpares



simetria relativamente a
uma reta com vetor diretor v

- **Rotações:**

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ define uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

De facto, tem-se $(x_1, x_2)|(-x_2, x_1) = 0$ para todo o $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Em geral, $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, define uma *rotação* de ângulo θ radianos no sentido anti-horário em torno da origem:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}.$$

Transformações geométricas no espaço

Vejamos alguns exemplos de transformações geométricas no espaço.

- A matriz $S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ define uma *simetria* relativamente ao plano xOy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

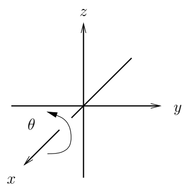
Definem-se de modo análogo as matrizes de simetria S_y e S_x relativamente aos planos xOz e yOz, respetivamente.

- A matriz $R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, define uma *rotação* de ângulo θ em torno do eixo dos zz:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{bmatrix}$$

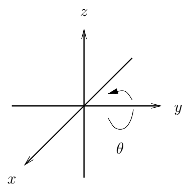
Definem-se de modo análogo as matrizes de rotação em torno do eixo dos xx e do eixo dos yy.

Rotação em torno do eixo dos xx
de ângulo θ



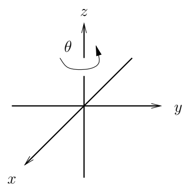
$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo dos yy
de ângulo θ



$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo dos zz
de ângulo θ



$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O produto de matrizes via transformações geométricas

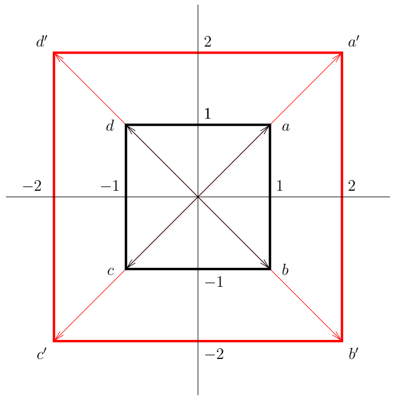
Podemos interpretar as colunas de AB como as imagens da transformação definida pela matriz A dos vetores que constituem as colunas de B.

Exemplo A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

define uma homotetia que transforma o quadrado Q de vértices, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ e $(-1,1)$, ou seja, definido pelos vetores $a=(1,1)$, $b=(1,-1)$, $c=(-1,-1)$ e $d=(-1,1)$, no quadrado Q' definido pelos vetores $[a'|b'|c'|d'] = A\cdot[a|b|c|d] = [Aa|Ab|Ac|Ad]$ ou seja, definido pelas colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{r|r|r|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r|r|r|r} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

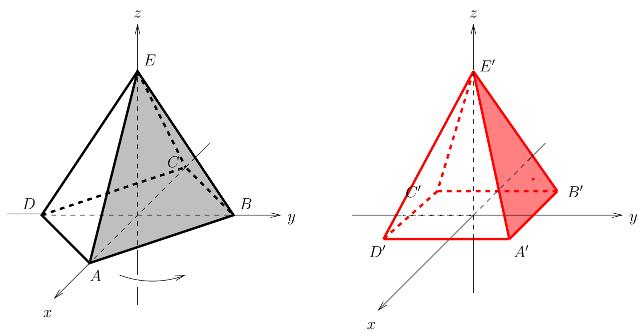


Exemplo A matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

define uma rotação de ângulo $\frac{\pi}{4}$ radianos em torno do eixo dos zz que transforma a pirâmide de base quadrangular definida pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (-1, 0, 0)$ e $D = (0, -1, 0)$ e com vértice $E = (0, 0, 1)$, na pirâmide de base definida por A', B', C' e D' e vértice E', onde

$$\begin{aligned} [A'|B'|C'|D'|E'] &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{aligned}$$



Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *invertível* (ou *não singular*) se existir uma matriz quadrada B de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Notas:

- Prova-se que basta verificar uma das condições $AB = I$ ou $BA = I$.
- A matriz B qd existe é única, designa-se por *inversa* de A e denota-se por A^{-1}.

Uma matriz que não é invertível, diz-se *singular*.

Algumas propriedades

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Têm-se:

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- A^T é invertível e tem-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

- $A\,B$ é invertível e tem-se $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.

Exemplos

- $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$
- $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é invertível sse $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$, tendo-se
$$A^{-1} = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$
- $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, pois $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$
- Mais geralmente, tem-se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ se $ad - bc \neq 0$.

Quais serão as matrizes inversas das matrizes R_θ, S_z e $R_{z,\theta}$?

Equações matriciais e sistemas de equações lineares

Consideremos a equação matricial

$$\boxed{Ax = b}$$

onde $A = [a_{ij}]$ é uma matriz do tipo $m \times n$, $x = [x_j]$ é a matriz-coluna (i.e, vector) com n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e $b = [b_i]$ é uma matriz-coluna com m componentes. Tem-se o seguinte:

o vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é solução da equação matricial $Ax = b$ se e só se x é solução do sistema *linear*, com m equações e n variáveis,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

As matrizes A e b chamam-se, respectivamente, *matriz dos coeficientes* e *matriz dos termos independentes* do sistema $Ax = b$. A matriz do tipo $m \times (n+1)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

chama-se *matriz ampliada* do sistema $Ax = b$ denota-se por $[A|b]$.

Exemplo

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tem-se,

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 0x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto $x = (x_1, x_2)$ é solução da equação matricial $Ax = b$ se e só se é solução do sistema linear com 2 equações e 2 variáveis,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 0x_2 = 1, \end{cases}$$

cuja matriz ampliada $[A|b]$ é

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Se $m = n = 1$, $Ax = b$ reduz-se a uma equação linear com uma variável, sendo normalmente denotada por $ax = b$, tendo-se $x = a^{-1}b$ (se $a \neq 0$).

A notação matricial vai-nos permitir indicar a solução de um sistema $Ax = b$, com A matriz quadrada de ordem n, de uma forma análoga ao caso anterior, substituindo a condição $a \neq 0$ por A *invertível.*

<u>Solução da equação $Ax = b$ com A invertível</u>

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Logo a solução (única) de $Ax = b$ é $x = A^{-1}b$.

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ do exemplo anterior e o vector $b = (b_1, b_2)$. A solução (única) de $Ax = b$ é

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_2 \\ \frac{b_1+b_2}{2} \end{bmatrix}.$$

Dois sistemas lineares do tipo $m \times n$ dizem-se *equivalentes* se possuirem o mesmo conjunto de soluções.

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Classificação e resolução de um sistema linear

Um sistema linear pode ser,

- *possível e determinado* (PD) se possuir uma única solução.
- *possível e indeterminado* (PI) se possuir mais que uma solução (nesse caso possui ∞ soluções).
- *impossível* (I) se não possuir soluções.

Classificar/discutir um sistema é determinar se o sistema é PD, PI ou I.

Resolver um sistema é determinar o seu conjunto de soluções.

Operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada

(que transformam a matriz ampliada de um sistema na matriz ampliada de um sistema equivalente)

1. Multiplicar uma linha por um número real e adicionar o resultado a outra linha.

   $$\text{Ex: } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \quad (L_2 \to -2L_1 + L_2)$$

2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo:

   $$\text{Ex: } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad (L_2 \to \frac{-1}{3} L_2)$$

3. Trocar linhas entre si:

   $$\text{Ex: } \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right] \quad (L_1 \to L_2 \ ; \ L_2 \to L_1)$$

Definem-se analogamente operações elementares sobre as equações de um sistema.

Matriz em escada e matriz reduzida

- Uma matriz diz-se em *escada* se o 1º elemento não nulo de cada linha, que se designa por *pivot*, estiver mais à direita que o 1º elemento não nulo da linha anterior.

  $$\text{Ex: } \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 2 \end{array}\right]$$

- Uma matriz diz-se *reduzida* se estiver em escada, todos os pivots forem iguais a 1 e em cada coluna com pivot o único elemento não nulo é o próprio pivot.

$$\text{Ex:} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right]$$

- Definem-se analogamente sistema em escada e sistema reduzido, substituindo nas definições anteriores linha da matriz por equação do sistema.

Método de eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss desenvolve-se em duas fases utilizando as operações elementares sobre as equações [linhas] de um sistema [matriz] para obter um sistema [matriz] mais simples equivalente ao sistema [matriz] original:

(i) A **fase descendente** tem como objectivo pôr o sistema [matriz] em escada. No final desta fase podemos classificar o sistema. O sistema [matriz] em escada não é único, ou seja, depende das operações elementares que foram efectuadas.

(ii) A **fase ascendente** aplica-se aos sistemas possíveis e tem como objectivo reduzir o sistema [matriz] em escada. O sistema [matriz] reduzido é único, ou seja, não depende das operações elementares que foram efectuadas.

Esquematicamente:

$$\begin{array}{ccccc} \text{sistema/matriz} & \xrightarrow{\text{desc.}} & \text{sistema/matriz em escada} & \xrightarrow{\text{asc.}} & \text{sistema/matriz reduzido} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \textbf{classificação} & & \textbf{conjunto de soluções} \end{array}$$

Vamos ilustrar o método de eliminação de Gauss nalguns exemplos.

Exemplo 1

Pretende-se resolver o sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & & & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

Fase descendente:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Não existem equações impossíveis no sistema e todas as colunas do sistema em escada têm pivot. Logo o sistema é possível e determinado.

Fase ascendente:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Conjunto de soluções do sistema é $S = \{(1, 0, 2)\}$.

Exemplo 2

Resolver o sistema dado matricialmente por

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Fase descendente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right] \longrightarrow$$

Não existem equações impossíveis. Existem colunas sem pivot. Logo o sistema é possível e indeterminado, com variável livre x_4 associada à coluna sem pivot.

Fase ascendente:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{7}{2} - x_4 \\ x_2 &= -\frac{3}{2} \\ x_3 &= -\frac{5}{2} \\ x_4 &= \forall \end{cases}$$

O conjunto de soluções do sistema é

$$S = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \, : \, x_1 = \frac{7}{2} - x_4, \; x_2 = -\frac{3}{2}, \; x_3 = -\frac{5}{2}, \; x_4 = \forall\right\}$$

Podemos tomar valores arbitrários para x_4. Se, por exemplo, tomarmos $x_4 = 1$ obtemos a solução $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1)$.

Exemplo 3

Resolver o sistema dado matricialmente por

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Fase descendente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

A última linha da matriz corresponde à equação impossível

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1,$$

pelo que o sistema é impossível. Logo $S = \emptyset$.

Algorítmo para a determinação da inversa de uma matriz

Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Para calcular A^{-1} temos que determinar uma matriz $X = [x|y] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$, tal que $AX = I_2$.

Ora

$$\begin{aligned} AX = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & y_1 + 2y_2 \\ -x_1 & -y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ay = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Resolvendo os sistemas obtemos $x = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $y = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Em geral, para determinar a matriz inversa (quando existe) de uma matriz A de ordem n temos que determinar uma matriz $X = \left[x_1 | \cdots | x_n\right]$ tal que $AX = I_n$, ou seja, temos que resolver as equações matriciais, com a mesma matriz de coeficientes A,

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad Ax_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos resolver simultaneamente estas equações aplicando o método de Gauss para reduzir a matriz A:

$$
\begin{tikzcd}
{\left[A \mid I\right]} \arrow[r, "\text{desc.}"'] & {\begin{array}{c} \left[A' \mid I'\right] \\ A' \text{ em escada} \\ \text{tem linhas de zeros ?} \end{array}} \arrow[r, "\text{N}", "\text{asc.}"'] \arrow[d, "\text{S}"] & {\left[I \mid A^{-1}\right]} \\
& \boxed{\begin{array}{c} A \text{ é não invertível} \\ \textbf{STOP} \end{array}} &
\end{tikzcd}
$$

Exemplos

1. Pretende-se determinar a inversa da matriz (se existir) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   Aplicando o algorítmo da inversa, vem

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right].
$$

   Logo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Pretende-se determinar a inversa da matriz (se existir) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Tem-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [\, A' | I' \,]$$

A' tem uma linha de zeros. Logo A é não invertível.