Ex-1-40-prod-trigo-anos

12 de outubro de 2020 15:54

1.40. Numa dada região, registou-se anualmente entre 1998 e 2006 a produção de trigo. Designando por x o ano e por y a produção de trigo, em milhares de toneladas, obtiveram-se os seguintes valores para os 9 pares de observações efectuadas:

$\bar{x} = 2002$; $\bar{y} = 270.5$; $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2 = 60$

$\sum_{i=1}^{9}(y_i-\bar{y})^2 = 1416.2$; $\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = -203$

a) Determine a recta de regressão dos mínimos quadrados da evolução da produção de trigo em função do tempo. Indique a sua precisão.

b) Se se decidisse identificar os anos por $1, \ldots, 9$, respectivamente, qual seria a precisão da recta de regressão que se obteria considerando esta transformação? Justifique convenientemente.

x	x'
1998	1
1999	2
$\vdots$	
2006	9

Indicadores para dados bivariados

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$

$$cov(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n(n-1)}$$

$$r = r_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{s_x s_y} \quad \text{se } s_x \neq 0, s_y \neq 0$$

se $x_i' = \underset{-1997}{a} + \underset{1}{b}x_i$ e $y_i' = \underset{0}{c} + \underset{1}{d}y_i$ $\quad b, d \neq 0$

$cov(x', y') = bd\, cov(x,y)$

$$r_{x',y'} = \begin{cases} r_{x,y} & \text{se } bd > 0 \\ -r_{x,y} & \text{se } bd < 0 \end{cases}$$

Regressão linear simples

$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \qquad \hat{y}_i - \bar{y} = b_1(x_i - \bar{x})$

$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{cov(x,y)}{s_x^2} = r\dfrac{s_y}{s_x}, & s_x \neq 0 \\ b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$
$$\Leftrightarrow SQ_T = SQ_E + SQ_R$$

$$R^2 = \frac{SQ_R}{SQ_T} = \frac{cov^2(x,y)}{s_x^2\, s_y^2} = r^2$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n(n-1)}$$

se $x_i' = \underset{-1997}{a} + \underset{1}{b}x_i$ então $\bar{x'} = a + b\bar{x}$, $s_{x'}^2 = b^2 s_x^2$

x_i É O ANO DA i-ÉSIMA OBSERVAÇÃO $\quad i = 1, \ldots, n = 9$

y_i É A PROD. DE TRIGO NA i-ÉSIMA OBS.

DADOS $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ $\quad n = 9$

$y = b_0 + b_1 x$

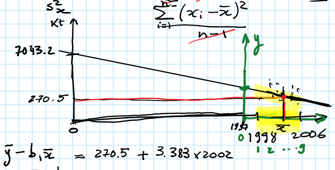
kt $\quad$ kt $\quad$ kt/ano $\times$ anos

a) recta $y = b_0 + b_1 x$

$$b_1 = \frac{cov(x,y)}{s_x^2} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\cancel{n-1}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\cancel{n-1}}} = -\frac{203}{60} = -3.383 \text{ kt/ano}$$

kt

b_1 REPRESENTA A VARIAÇÃO MÉDIA ESPERADA PARA A PRODUÇÃO DE TRIGO, POR ANO.



$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 270.5 + 3.383 \times 2002$

$\bar{y} = b_0 + b_1\bar{x}$ $\quad = 7043.266$ kt $\qquad y = 7043.2 - 3.383x$

$(\bar{x}, \bar{y}) \in$ recta $\qquad$ DECLIVE

PRECISÃO DA RECTA É DADA POR
$$R^2 = \frac{cov^2(x,y)}{s_x^2\, s_y^2} = \frac{\left(\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\cancel{n-1}}\right)^2}{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\cancel{n}}\,\dfrac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{\cancel{n-1}}} = \frac{-203^2}{60 \times 1416.2} = 0.48 = 48\%$$

NOTA: COEF. DE CORRELAÇÃO : $r \ (= r_{xy})$

" " REGRESSÃO : b_1

" " DETERMINAÇÃO : $R^2 = \dfrac{SQR}{SQT} = (r_{xy})^2$: É A PROPORÇÃO DA VARIABILIDADE TOTAL DOS y_i QUE É EXPLICADA PELA RECTA DE REGRESSÃO

OU SEJA, 48% DA VARIABILIDADE DA PRODUÇÃO É EXPLICADA PELA RECTA.

b) $\boxed{x' = x - 1997}$ $\qquad x' = \underline{a} + \underline{b}x \quad \begin{cases} a = -1997 \\ b = 1 \end{cases}$

$$R^{2\,\prime} = \frac{cov^2(x', y)}{s_{x'}^2\, s_y^2} \underset{\text{C.A.}}{=} \frac{cov^2(x,y)}{s_x^2\, s_y^2} = R^2 = 48\%$$

C.A. $\begin{cases} cov(x', y) = cov(\overset{a}{-1997} + \overset{b}{1} \times x, y) = cov(x, y) \\ s_{x'}^2 = s_{-1997+x}^2 = s_x^2 \end{cases}$