Definição 7–Definição de Probabilidade: Axiomática de Kolmogorov

Probabilidade, ***P***, é uma aplicação que a cada acontecimento de Ω associa um número real satisfazendo o seguinte conjunto de axiomas:

- **A1)** $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega$;
- **A2)** $P(\Omega) = 1$;
- **A3)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$. (Axioma das probabilidades totais).

Definição 8–Definição de Probabilidade Condicional

Dados os acontecimentos A e B definidos em Ω, a probabilidade de A se realizar sabendo que B se realizou, ou seja, a probabilidade condicional de ***A*** dado ***B*** ou probabilidade de ***A*** se ***B*** representa-se por $P(A|B)$, com $P(B) > 0$ e define-se como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Definição 9

Dois acontecimentos A e B dizem-se mutuamente independentes se e só se

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Da definição 9 conclui-se que se A e B são independentes então $P(A|B) = P(A)$ se $P(B) > 0$ e $P(B|A) = P(B)$ se $P(A) > 0$.

Teorema 3–Teorema da probabilidade total

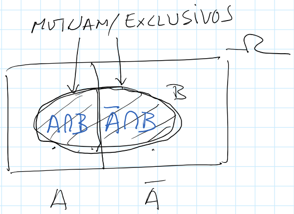
Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ acontecimentos definindo uma **partição sobre Ω**, i.e.,

$$A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = \Omega \quad \text{e} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i,j,\ i \neq j.$$

Se $P(A_i) > 0$, então para qualquer acontecimento $B \subset \Omega$ tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B|A_i).$$

MUTUAM/ EXCLUSIVOS



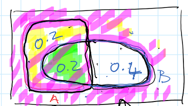
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$= P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\bar{A})\,P(\bar{A})$

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- $P(A) \leq 1$.
- $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.
- Se $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$.
- Sejam $A_1, ..., A_n$ acontecimentos mutuamente exclusivos então $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. ENTÃO $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

2.1. Considere os acontecimentos A e B tais que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ e $P(A \cup B) = 0.8$. Determine:

$$P(A \cap B); \quad P(A - B); \quad P(\bar{A} \cap B); \quad P(A \cup \bar{B}).$$



$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= 0.4 + 0.6 - 0.8 = 0.2$

ii) $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$ FORM.

$= 0.4 - 0.2 = 0.2$

iii) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$ FORM.

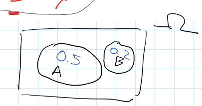
iv) $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0.4 + (1 - P(B)) - 0.2$

$= 0.4 + 0.4 - 0.2 = 0.6$

2.5. Sejam A e B acontecimentos tais que $P(A) = 0.5$ e $P(A \cup B) = 0.7$. Determine $P(B)$ sabendo que :

a) A e B são acontecimentos independentes;

b) A e B são acontecimentos mutuamente exclusivos. $A \cap B = \emptyset$



b) COMO A, B SÃO MUTUAMENTE EXCLUSIVOS,

$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

ENTÃO $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0$

$0.7 = 0.5 + P(B) \quad \therefore P(B) = 0.2$

a) COMO A, B SÃO INDEPENDENTES,

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

ENTÃO $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)$

$0.7 = 0.5 + p - 0.5\,p$

$0.7 - 0.5 = p(1 - 0.5)$

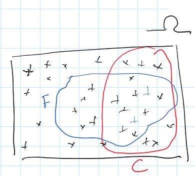
$P(B) = p = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$

2.7. Numa propriedade agrícola, sabe-se que 60%, 75% e 50% das árvores são de folha caduca, de fruto e de fruto com folha caduca, respectivamente. Calcule a probabilidade de uma árvore da propriedade, escolhida ao acaso:

a) não ser árvore de fruto;

b) ser árvore de fruto ou de folha caduca;

c) ser árvore de fruto, sabendo que tem folha caduca.



C É O ACONTECIMENTO " SER ÁRVORE DE FOLHA CADUCA"

F " " " " DE FRUTO"

$P(C) = 0.6 \ ; \ P(F) = 0.75 \ ; \ P(C \cap F) = 0.5$

a) $P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0.75 = 0.25$

b) $P(C \cup F) = P(C) + P(F) - P(C \cap F)$

$= 0.6 + 0.75 - 0.5 = 0.85$

c) $= \frac{P(C \cap F)}{P(C)} = \frac{0.5}{0.6} = 0.8333$

SERIAM IGUAIS SE A, B INDEPENDENTES

2.8. As probabilidades de três corredores de velocidade percorrerem 100 metros em menos de 10 segundos são respectivamente: 1/3, 1/5 e 1/10. Considerando que os tempos dos três atletas são independentes, calcule a probabilidade de, uma corrida em que participam apenas os três atletas, ser ganha em menos de 10 segundos.

A É O ACONTECIMENTO « O ATLETA A CORRE OS 100 m EM MENOS DE 10'' »

B " « " B " »

C

$P(A) = \frac{1}{3} \ ; \ P(B) = \frac{1}{5} \ ; \ P(C) = \frac{1}{10}$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. ENTÃO $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)$

A, B, C SÃO ACONT. INDEPENDENTES

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3}\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\frac{1}{10} + \boxed{\frac{1}{3}\frac{1}{5}\frac{1}{10}} = 0.52$

$\frac{1}{150}$

Probabilidade de acontecimentos

$$P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) \quad \text{se } P(B) \neq 0$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Os acontecimentos A e B dizem-se **mutuamente exclusivos** ou **incompatíveis** se e só se a realização de um implica a não realização do outro, i.e., se e só se $AB = \emptyset$.

2.15. Um teste detecta a presença de um certo tipo de bactérias na água com uma probabilidade 0.9 no caso de o referido tipo existir. Se não existir, detecta a sua ausência com probabilidade 0.8. Sabendo que a probabilidade de que uma amostra de água contenha bactérias daquele tipo é 0.20, calcule a probabilidade de que, ao retirar uma amostra ao acaso:

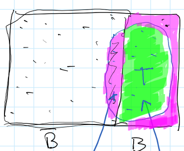
a) o teste dê resultado positivo,i.e., detecte a presença de bactérias;

b) haja de facto bactérias quando o teste dá positivo;

c) o teste dê um resultado errado.

B É O ACONTECIMENTO « A BACTÉRIA EXISTE NA AMOSTRA DE ÁGUA »

T É " " « O TESTE É POSITIVO »



$P(T/B) = 0.9$ " SENSIBILIDADE DO TESTE "

$P(\overline{T}/\overline{B}) = 0.8$ " ESPECIFICIDADE DO TESTE "

$P(B) = 0{,}2$

$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A)\,P(A)}{P(B)}}$

$\overline{B} \cap T$ $\quad$ $B \cap T$

MUTUAM/ EXCLUSIVOS

a) $P(T) = P(T \cap \overline{B}) + P(T \cap B) = 0.16 + 0.18 = 0.34$ C.A.

C.A. $P(T \cap B) = P(T/B)\,P(B) = 0.9 \times 0.2 = 0.18$

$P(T \cap \overline{B}) = P(T/\overline{B})\,P(\overline{B}) = 0.2 \times 0.8 = 0.16$

$\boxed{\text{FORM: } P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)}$

$P(\overline{T}/\overline{B}) = 1 - P(T/\overline{B})$ ENTÃO $P(T/\overline{B}) = 1 - 0.8 = 0.2$

b) $P(B/T) = \frac{P(B\cap T)}{P(T)} = \frac{P(T/B)\,P(B)}{P(T)} = \frac{0.9 \times 0.2}{0.34} = \frac{0.18}{0.34} = 0.5294$

$P(\overline{B}/T) = 0{,}4706$ PROB DE " FALSO POSITIVO "

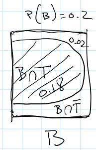
c)

$\underbrace{P(T \cap \overline{B})}_{0.16} + \underbrace{P(\overline{T} \cap B)}_{0.02} = 0.18$ C.A.

C.A. $P(\overline{T} \cap B) = P(B) - P(B \cap T) = 0.2 - \underbrace{P(T/B)}_{0.9} \cdot \underbrace{P(B)}_{0.2}$

$= 0.2 - 0.18 = 0.02$

$P(B) = 0.2$



$\boxed{B = (B \cap \overline{T}) \cup (B \cap T)}$ ENTÃO $\boxed{P(B) = P(B \cap \overline{T}) + P(B \cap T)}$

MUTUAM/ EXCLUSIVOS