Ex. 2.74

23 de novembro de 2020 17:11

2.74. (*Exame 22.01.2009*) Num restaurante, a procura semanal (em litros) de uma determinada marca de cerveja segue uma distribuição normal com desvio padrão 4 litros. Sabe-se que em 50% das semanas a procura é inferior a 50 litros.

a) Determine o valor médio e a variância da variável aleatória que designa a procura semanal de cerveja daquela marca.

b) Calcule a probabilidade de, numa semana, a procura ser superior a 60 litros.

c) Qual deverá ser a quantidade de cerveja que deve existir em cada semana de modo que a probabilidade de haver ruptura de stock seja igual a 0.015?

d) Sendo cada litro de cerveja é vendido a 5 euros, caracterize a lei da venda mensal (4 semanas) de cerveja, admitindo que em cada semana não se esgota o stock.

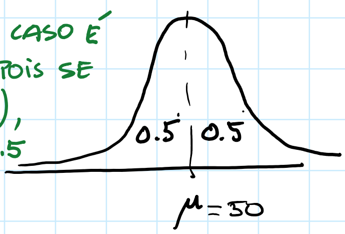
Screen clipping taken: 23/11/2020 17:53

X V.A. PROCURA SEMANAL (EM LITROS)

$X \cap N(\mu, \sigma = 4)$; $P(X < 50) = 0.5$

a) $VAR[X] = \sigma^2 = 4^2 = 16$

NOTA: ESTE CASO É TRIVIAL, POIS SE $X \cap N(\mu, \sigma)$, $P(X < \mu) = 0.5$



$E[X] = \mu$

COMO $P(X < 50) = 0.5$

ENTÃO $P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{4}}_{Z} < \frac{50-\mu}{4}\right) = 0.5$

OU SEJA, $\Phi\left(\frac{50-\mu}{4}\right) = 0.5$ TABELA: $\Phi(0) = 0.5$

PORTANTO $\frac{50-\mu}{4} = 0$ E $\mu = 50$

NOTA: ESTE PROCEDIMENTO PODE SER ADAPTADO A QUALQUER QUANTIL:

POR EXEMPLO, SE $P(X < 45) = 0.6$

ENTÃO $P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{4}}_{Z} < \frac{45-\mu}{4}\right) = 0.6$

OU SEJA, $\Phi\left(\frac{45-\mu}{4}\right) = 0.6$ TABELA: $\Phi(0.253) = 0.6$

PORTANTO $\frac{45-\mu}{4} = 0.253$ E $\mu = 43.98$

b) $P(X > 60) = \dots = 0.0062$; $X \cap N(\mu = 50, \sigma = 4)$

c) DETERMINAR STOCK x TAL QUE $P(\underset{\text{PROCURA}}{X} > \underset{\text{STOCK}}{x}) = 0.015$

c) DETERMINAR STOCK x TAL QUE $P(\underset{\text{v.a.}}{X} > \underset{\text{const}}{x}) = 0.015$

RESPOSTA: 58.68 LITROS

d) Y V.A. VALOR DE VENDA EM 4 SEMANAS EM EUROS

X_i V.A. VENDA NA SEMANA i EM LITROS

$$Y = 5X_1 + 5X_2 + 5X_3 + 5X_4$$

Screen clipping taken: 23/11/2020 18:07

Teorema 11–Generalização do teorema anterior

Mostre que, sendo $X_1, ..., X_n$ v.a. nas condições do teorema 10, $a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n$ tem distribuição normal de parâmetros (μ, σ), com $\mu = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + ... + a_n \mu_n$ e $\sigma = \sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + ... + a_n^2 \sigma_n^2}$.

SUPONDO QUE X_1, X_2, X_3, X_4 SÃO V.A. INDEPENDENTES

ENTÃO $Y \cap N\left(\mu = \underbrace{5\times 50 + \cdots + 5\times 50}_{4\text{ VEZES}},\ \sigma = \sqrt{\underbrace{5^2\times 16 + \cdots + 5^2 \times 16}_{4\text{ VEZES}}}\right)$

$$Y \cap N(1000, 40)$$