Ex 2.71

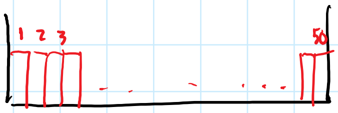
23 de novembro de 2020 10:22

2.71. Um produto pesa em média 10 g com desvio padrão de 2 g. Este produto é embalado em caixas com 50 unidades cada. Sabe-se que as caixas vazias pesam em média 500 g com desvio padrão de 25 g. Admita que as variáveis peso do produto e da caixa vazia são independentes com distribuição normal.

a) Qual é a probabilidade, aproximada, de numa caixa encontrar no máximo 10 unidades do referido produto com peso inferior a 8 g cada?

b) Qual é a probabilidade de uma caixa cheia pesar mais do que 1050 g?

b)



Y V.A. PESO DA CAIXA VAZIA ; $Y \frown N(\mu = 500, \sigma = 25)$

X_i V.A. PESO DA i-ÉSIMA UNIDADE

$X_i \frown N(\mu = 10, \sigma = 2)$

T V.A PESO DA CAIXA COM UNIDADES

$T = Y + X_1 + X_2 + \dots + X_{50}$

Teorema 10

Sejam $X_1, \dots, X_n$, v.a. normais independentes, tais que $X_1 \frown \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, $X_2 \frown \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, $\cdots$, $X_n \frown \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$.
A v.a. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ tem distribuição normal de parâmetros (μ, σ), com

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

SUPONDO QUE $Y, X_1, X_2, \dots, X_{50}$ SÃO V.A. INDEPENDENTES,

$$T \frown N\Big(\mu = 500 + \underbrace{10 + \dots + 10}_{50 \text{ VEZES}}, \sigma = \sqrt{25^2 + \underbrace{2^2 + \dots + 2^2}_{50 \text{ VEZES}}}\Big)$$

OU SEJA $T \frown N(\mu = 1000, \sigma = 28.72)$

PEDE-SE $P(T > 1050) = 1 - P(T \leq 1050) = 1 - \phi\left(\frac{1050 - 1000}{28.72}\right) = 1 - \phi(1.74)$

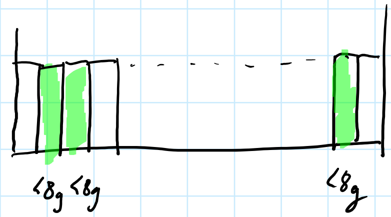
$= 1 - 0.95907 \approx 0.041$

2.71. Um produto pesa em média 10 g com desvio padrão de 2 g. Este produto é embalado em caixas com 50 unidades cada. Sabe-se que as caixas vazias pesam em média 500 g com desvio padrão de 25 g. Admita que as variáveis peso do produto e da caixa vazia são independentes com distribuição normal.

a) Qual é a probabilidade, aproximada, de numa caixa encontrar no máximo 10 unidades do referido produto com peso inferior a 8 g cada?

b) Qual é a probabilidade de uma caixa cheia pesar mais do que 1050 g?

a)



X v.A. PESO DE UMA UNIDADE $X \frown N(\mu=10, \sigma=2)$

PROB DE UNIDADE PESAR MENOS DE 8g:

$P(X<8) = \phi\left(\frac{8-10}{2}\right) = \phi(-1) = 1-\phi(1) = 1-0.84134$
$= 0.15866$

Y v.A $\underline{\text{Nº}}$ DE $\underbrace{\text{UNIDADES COM PESO INFERIOR A 8g}}_{\text{"SUCESSO"}}$ NAS $n=50$ $\underbrace{\text{UNIDADES}}_{\text{"PROVAS DE BERNOULLI" INDEPENDENTES}}$

V.A. DISCRETA

ENTÃO $Y \frown B(n=50, p=0.15866)$

PEDE-SE $P(Y \leq 10) \underset{\text{C.A.}}{=} 0.83891$

$\boxed{\text{R: pbinom(10, 50, 0.15866) \# 0.8406}}$

C.A.

Aproximações das distribuições

$X \frown \mathcal{H}(N,n,k)$ e $\frac{N}{n} > 10 \Rightarrow X \sim \mathcal{B}(n,p)$ com $p = \frac{k}{N}$

$X \frown \mathcal{B}(n,p)$, $n \geq 20$ e $p \leq 0.05 \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ com $\lambda = np$

→ • $X \frown \mathcal{B}(n,p)$, $np > 5$ e $nq > 5 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ FAZER C.C.

com $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$

$X \frown \mathcal{P}(\lambda)$ e $\lambda > 12 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ com $\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda}$ FAZER C.C.

NOTA: É NECESSÁRIO FAZER UMA CORRECÇÃO DE CONTINUIDADE (C.C.) (VER ABAIXO) QUANDO SE APROXIMA UMA DISTRIBUIÇÃO DISCRETA (e.g. Binomial) POR UMA DIST. CONTÍNUA (normal).

COMO $np = 50 \times 0.15866 = 7.93 > 5$
$nq = 42.07 > 5$ $(q = 1-p)$

ENTÃO $Y \underset{\text{"APROX."}}{\sim} N(\mu = 7.93, \sigma = 2.58)$

$\sqrt{npq} = \sqrt{50 \times 0.15866 \times 0.84134} = 2.58$

CORRECÇÃO DE CONTINUIDADE

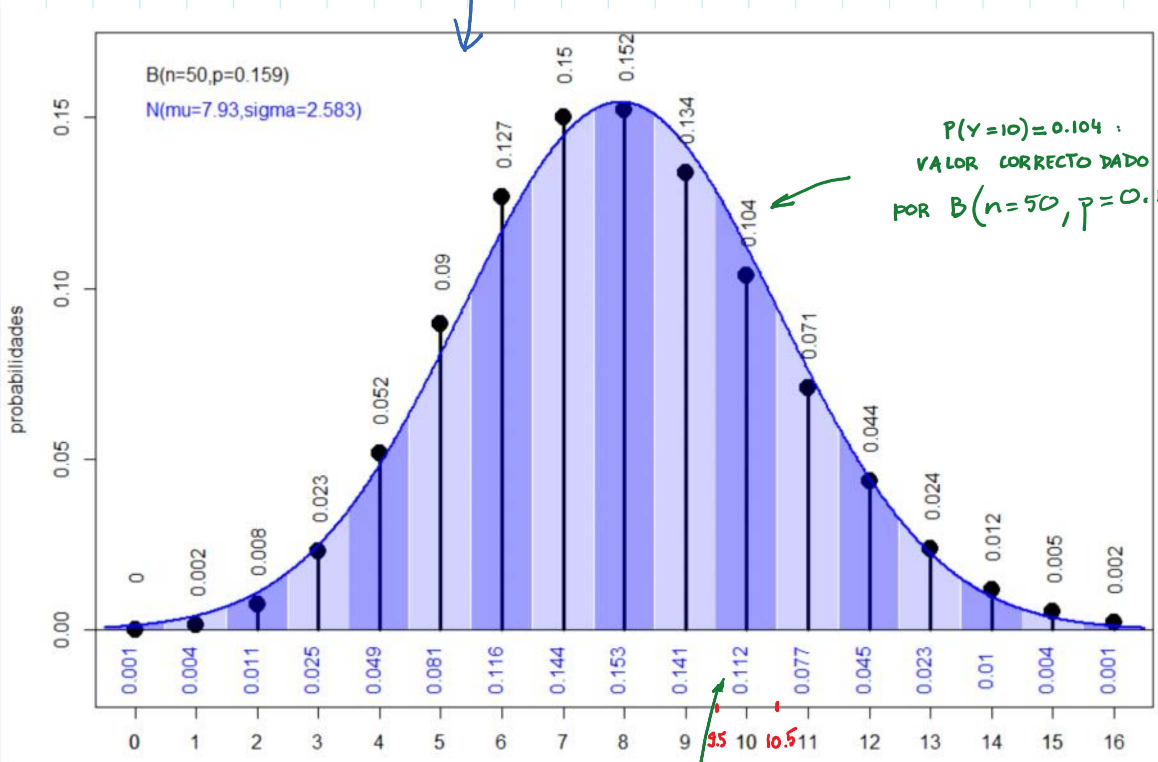
ENTÃO $P(Y \leq 10) \overset{\downarrow}{=} P(Y < 10.5) \sim P\left(\frac{Y-7.93}{} \leq \frac{10.5-7.93}{}\right) = \phi(0.99)$

CORRECÇÃO DE CONTINUIDADE

ENTÃO $P(Y \le 10) = P(Y \le 10.5) \simeq P\left(\underbrace{\frac{Y-7.93}{2.58}}_{z} \le \underbrace{\frac{10.5-7.93}{2.58}}_{0.99}\right) = \phi(0.99)$

$= 0.83891$

TABELA



$P(Y=10) = 0.104$: VALOR CORRECTO DADO POR $B(n=50, p=0.15866)$

$P(Y=10) \simeq 0.112$: VALOR APROXIMADO DADO POR $F(10.5) - F(9.5)$, PARA $X \cap N(7.93, 2.58)$