Ex. 2.94

29 de novembro de 2020 15:57

2.94. (*Exame 23.01.2020*) Um filtro de ar é instalado para remover partículas sólidas numa zona de uma empresa.

O número de partículas capturadas numa amostra de ar segue uma distribuição de Poisson com valor médio 6.

a) Calcule a probabilidade de numa amostra de ar serem capturadas mais de 8 partículas.

b) Suponha que, quando o filtro captura mais de 8 partículas, um alarme é accionado com probabilidade 0.9. Quando 8 ou menos partículas são capturadas o alarme é accionado com probabilidade 0.01.

i) Determine a probabilidade de o alarme ser accionado.

ii) Qual é a probabilidade de haver falha no sistema de alarme?

X V.A. Nº PARTÍCULAS NUMA AMOSTRA DE AR ; $X \cap \mathcal{P}(\lambda=6)$

a) $P(X>8) = 1-P(X\leq 8) = 1-0.847 = 0.153$

TAB. POISSON $\begin{cases}\lambda=6\\ x=8\end{cases}$

b) A É O ACONTECIMENTO "ALARME É ACCIONADO"
F É " " "FILTRO CAPTURA MAIS DE 8 PARTÍCULAS"

$P(F) = 0.153 \qquad P(A/F)=0.9 \qquad P(A/\bar{F})=0.01$

i) $P(A) = P(A\cap F) + P(A\cap \bar{F}) = P(A/F).P(F) + P(A/\bar{F}).P(\bar{F}) =$

$= 0.9 \times 0.153 + 0.01 \times (1-0.153) = 0.1462$

0.9*0.153+0.01*(1-0.153)=0.1462

ii) $P(A\cap\bar{F}) + P(\bar{A}\cap F) = P(A/\bar{F}).P(\bar{F}) + P(\bar{A}/F).P(F) =$
$= 0.01\times(1-0.153) + (1-0.9)\times 0.153 = 0.0238$

0.01*(1-0.153)+(1-0.9)*0.153=0.0238

c) Em duas amostras de ar recolhidas de forma independente, qual é a probabilidade de no total serem capturadas 13 partículas?

d) Na empresa estão instalados, em locais distintos, 40 filtros de ar idênticos. Para responder às perguntas que se seguem, considere que cada filtro atua sobre uma única amostra de ar.

i) Determine a probabilidade, aproximada, de a média do número de partículas capturadas por filtro de ar ser inferior a 7.

ii) Qual é a probabilidade, aproximada, de serem capturadas mais de 8 partículas em pelo menos 5 filtros?

c) SEJA X_1 O Nº DE PARTÍCULAS NA 1ª AMOSTRA ; $X_1 \cap \mathcal{P}(6)$

X_2 '' '' 2ª '' ; $X_2 \cap \mathcal{P}(6)$

SE Y_1, Y_2 V.A. INDEP., ENTÃO $X_1 + X_2 \cap \mathcal{P}(\lambda = 12)$

PEDE-SE $P(X_1 + X_2 = 13) = P(X_1 + X_2 \leq 13) + P(X_1 + X_2 \leq 12) =$

TAB. POISSON $\begin{cases} \lambda = 12 \\ x = 12, 13 \end{cases}$

	$\lambda = E[X]$									
x	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10	11	12
0	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.001	0.001
3	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.005	0.002
4	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.015	0.008
5	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.038	0.020
6	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.079	0.046
7	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.143	0.090
8	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.232	0.155
9	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.341	0.242
10	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.460	0.347
11	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.579	0.462
12	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.689	0.576
13	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864	0.781	0.682

Screen clipping taken: 29/11/2020 16:34

$= 0.682 - 0.576$

$= 0.106$

d) X_i V.A. Nº PARTÍCULAS NO i-ÉSIMO FILTRO, COM $\mu = E[X] = \lambda = 6$
$i = 1, \dots, 40$
$\sigma^2 = VAR[X] = \lambda = 6$

			$E[X]$	$VAR[X]$
Poisson	$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \ldots$	$\lambda > 0$	λ	λ

i) $P(\bar{X} < 7)$, COM $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_{40}}{40}$. SUPONDO $X_1, \dots, X_{40}$ V.A. INDEP.,

PELO TEOR. DO LIMITE CENTRAL, $\dfrac{\bar{X} - 6}{\sqrt{6}/\sqrt{40}} \sim N(0,1)$

Teorema Limite Central

Sejam $X_1, \ldots, X_n$, v.a.'s independentes e identicamente distribuídas com valor médio μ e variância σ^2 (finita).

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ tem-se, c/ n grande

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{e} \quad \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ASSIM $P(\bar{X} < 7) = P\left(\dfrac{\bar{X} - 6}{\ldots} < \dfrac{7 - 6}{\ldots}\right) =$

$$\underbrace{\sqrt{6}/\sqrt{40}}_{Z} \quad \underbrace{\sqrt{6}/\sqrt{40}}$$

Sqrt(40)/sqrt(6)=2.581988897471612

$$= P(Z < 2.581) \underset{\text{TABELA NORMAL}}{=} \phi(2.58) = 0.995$$

ii) Y v.a. nº de $\underbrace{\text{FILTROS COM MAIS DE 8 PARTÍCULAS}}_{\text{"SUCESSO"}}$ EM $n=40$ $\underbrace{\text{FILTROS}}_{\text{PROVAS}}$

SE $X_1, \ldots, X_{40}$ SÃO V.A. INDEP. E SE $P(X_i > 8)$ É CONSTANTE

ENTÃO $Y \cap B(n=40, p=0.153)$ $\quad P(X>8) \overset{a)}{=} 0.153$

PEDE-SE $P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4)$

$$\underset{\text{C.A.}}{=} 1 - 0.239 = 0.761$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{R: } 1-\text{pbinom}(4, 40, 0.153) \\ \# \ 0.753 \end{array}}$$

C.A. COMO Y NÃO ESTÁ TABELADA $(n=40>20)$
ENTÃO VAMOS FAZER UMA APROXIMAÇÃO:

$X \frown \mathcal{B}(n,p),\ n \geq 20$ e $p \leq 0.05 \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ com $\lambda = np$

$X \frown \mathcal{B}(n,p),\ np > 5$ e $nq > 5 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ ← FAZER C.C.

com $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$

COMO $np = 40 \times 0.153 = 6.12$ E $nq = 40 \times 0.847 = 33.88$

ENTÃO

$$Y \sim N(\mu = 6.12,\ \sigma = 2.27) \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \times 0.153 \times 0.847} = 2.27$$

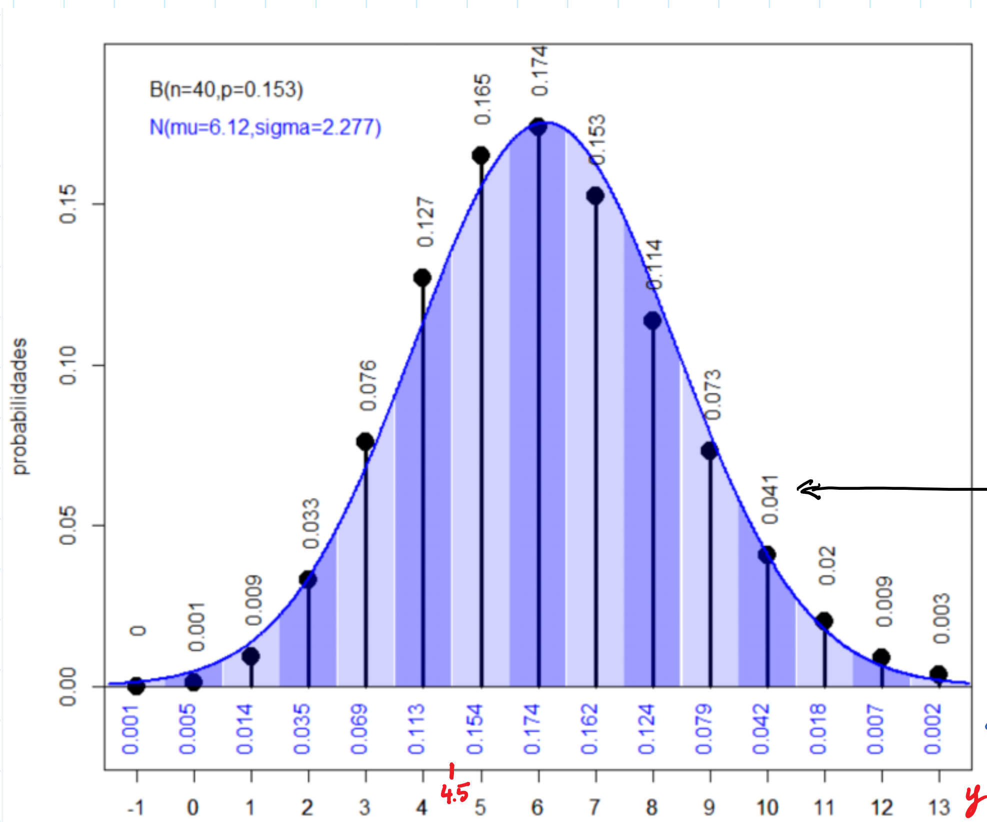
É NECESSÁRIO FAZER CORRECÇÃO DE CONTINUIDADE:

$$P(Y \leq 4) = P(Y \leq 4.5) \simeq P\Big(\underbrace{\frac{Y-6.12}{2.27}}_{z} \leq \underbrace{\frac{4.5-6.12}{2.27}}_{-0.71}\Big) = \phi(-0.71) =$$

$$= 1 - \phi(0.71) =$$

TABELA NORMAL $= 1 - 0.76115 =$

$= 0.23885$



← VALORES CORRECTOS $B(40, 0.153)$

← VALORES APROXIMADOS $N(6.12, 2.27)$