Ex.3.15

30 de novembro de 2020 13:00

3.15. Seja X uma população com distribuição normal, de média μ e desvio padrão $\sigma=2$. Uma amostra aleatória de dimensão 25 foi extraída desta população, tendo-se obtido $\bar{x} = 78.3$.

a) Calcule o intervalo de confiança a 99% para μ.

b) Qual o erro máximo cometido (a 99% de confiança) ao estimar μ por $\bar{x}$ =78.3?

c) Qual deverá ser a dimensão da amostra para que o erro máximo cometido, a 99% de confiança, ao estimar μ por $\bar{x}$, não exceda 0.1?

X V.A. COM $\mu = E[X]$, $\sigma = \sqrt{VAR[X]} = 2$

parâmetro DESCONHECIDO

MAIS, $X \cap N(\mu, \sigma = 2)$

a) DETERMINAR UM INTERVALO DE CONFIANÇA (I.C.) PARA μ. COMO O I.C. TEM 99% DE CONFIANÇA,

$(1-\alpha) \times 100 = 99$ isto é $1-\alpha = 0.99$ e $\alpha = 0.01$

99%

INTERVALOS DE CONFIANÇA (a $(1-\alpha) * 100\%$) PARA MÉDIAS, VARIÂNCIAS E PROPORÇÕES

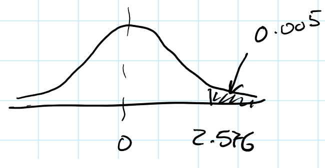
Parâmetros	Condições	
μ	dist. normal e σ conhecido; ou n 'grande' (se σ desconh. usar s-desvio padrão amostral)	$\bar{x} - z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$

I.C. a 99% PARA μ:

$$\left] \bar{x} - \underbrace{z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{SEMI-AMPLITUDE DO I.C.}} \;,\; \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

COM $\bar{x} = 78.3$, $\sigma = 2$, $n = 30$, $\alpha = 0.01$

$$z_{\alpha/2} = z_{0.01/2} = z_{0.005} = 2.576$$



$P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

ϵ	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_ϵ	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

78.3-2.576*2/5=77.2696

$$\left] 78.3 - \underbrace{2.576 \times \frac{2}{\sqrt{25}}}_{1.03} \;,\; 78.3 + 2.576 \times \frac{2}{\sqrt{25}} \right[$$

78.3+2.576*2/5=79.3304

$$\Big]\ \underbrace{\qquad\sqrt{25}\qquad}_{1.03}\ \qquad \sqrt{25}$$

78.3+2.576*2/5=79.3304

$= \,]\, 77.27\,,\, 79.33\,[$ I.C. PARA μ A 99% CONFIANÇA

b) AO AFIRMAR QUE $\mu = 78.3$, O MAIOR ERRO COMETIDO (A 99% CONFIANÇA) CORRESPONDE AOS CASOS EM QUE μ TOMA O VALOR MAIS AFASTADO POSSÍVEL DE 78.3, OU SEJA,

1. $\mu = 77.27$: NESSE CASO O ERRO É $78.3 - 77.27 = 1.03$

<u>OU</u> 2. $\mu = 79.33$ "   "   "   " $79.33 - 78.3 = 1.03$

OU SEJA, O ERRO É NO MÁXIMO 1.03 E É A SEMI-AMPLITUDE DO INTERVALO DE CONFIANÇA.

c) DETERMINAR n TAL QUE $\underbrace{z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{NOVA SEMI-AMPLITUDE DO I.C.}} = 0.1$

$\alpha = 0.01$ (PARA 99% DE CONFIANÇA).

$\sigma = 2$

$z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.576$ (COMO EM a))

SEMI-AMPLITUDE DESEJADA PARA O I.C.

FICA $\quad 2.576 \times \dfrac{2}{\sqrt{n}} \quad 0.1$. PORTANTO, $\sqrt{n} = \dfrac{2.576 \times 2}{0.1}$.

ENTÃO, $n = \left(\dfrac{2.576 \times 2}{0.1}\right)^2 = 2654.31$

COMO n TEM QUE SER INTEIRO,

NA PRÁTICA ESCOLHE-SE $n = 2655$ PARA GARANTIR QUE A SEMI-AMPLITUDE DO I.C. NÃO ULTRAPASSA 0.1.