Ex. 2.85

29 de novembro de 2020 19:05

2.85. Numa indústria alimentar o consumo diário de uma certa matéria prima (em toneladas) é uma variável aleatória com distribuição exponencial de valor médio 2.

a) Qual o valor do consumo diário mediano daquela matéria prima?

b) Qual deve ser o *stock* da matéria prima no início de cada dia de modo que a probabilidade de ruptura de *stock* seja 0.02?

c) Considere de novo a situação da alínea anterior e suponha que a ruptura de *stock* é independente de dia para dia.

i) Identifique e caracterize a distribuição do número de dias de um mês (30 dias) em que há ruptura de *stock*.

ii) Qual a probabilidade, aproximada, de num mês (30 dias) haver mais de 2 dias com ruptura de *stock*?

X V.A. CONSUMO DIÁRIO (t)

$X \cap Exp(\beta = 2)$, POIS $\beta = E[X]$

			$E[X]$	$VAR[X]$
Exponencial	$\begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\beta > 0$	β	β^2

a) DETERMINAR x TAL QUE $P(X \leq x) = 0.5$ (MEDIANA)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t/2} dt =$$

$$= -\left[e^{-t/2} \right]_0^x = -\left(e^{-x/2} - e^0 \right) = 1 - e^{-x/2}$$

ASSIM, $1 - e^{-x/2} = 0.5$. OU SEJA $e^{-x/2} = \frac{1}{2}$

PORTANTO $-\frac{x}{2} = \ln 2^{-1}$ E $x = 2 \ln 2 = 1.38$

2*ln(2)=1.386294361119891

A MEDIANA É 1.38 t (NOTA: COMO SERIA DE

ESPERAR, $\mu < x_{0.5}$ DADA A ASSIMETRIA DA DISTRIBUIÇÃO.

b) O VALOR PEDIDO (STOCK) CORRESPONDE AO QUANTIL $x_{0.98}$

POIS PRETENDE-SE QUE $P(\underset{(v.a.\ X)}{\text{CONSUMO}} > \underset{(x_{0.98})}{\text{STOCK}}) = 0.02$

É O VALOR DE x TAL QUE $P(X > x) = 0.02 \Leftrightarrow P(X \leq x) = 0.98$

OU SEJA $1 - e^{-x/2} = 0.98$. PORTANTO, $e^{-x/2} = 0.02$

E $-\frac{x}{2} = \ln 0.02$, OU SEJA $x = -2 \ln 0.02 = 7.82\ t$

-2*ln(0.02)=7.824046010856292

c) Y V.A. NÚMERO DE DIAS $\underbrace{\text{DE RUPTURA DE STOCK}}_{\text{"SUCESSO"}}$ EM $\underbrace{\text{30 DIAS}}_{\text{PROVAS}}$

i) NAS CONDIÇÕES DO ENUNCIADO, $Y \frown B(n=30, p=0.02)$

ii) $P(Y>2) = 1 - P(Y \leq 2) \underset{C.A.}{=} 1 - 0.977 = 0.023$

C.A.

COMO Y NÃO ESTÁ TABELADO, PODE FAZER-SE UMA APROXIMAÇÃO.

$X \frown \mathcal{B}(n,p)$, $n \geq 20$ e $p \leq 0.05 \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ com $\lambda = np$

$X \frown \mathcal{B}(n,p)$, $np > 5$ e $nq > 5 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, COM $\lambda = np = 30 \times 0.02 = 0.6$

$P(Y>2) = 1 - P(Y \leq 2) \simeq 1 - 0.977 = 0.023$

	$\lambda = E[X]$									
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981

NOTA : $P(Y \leq 2)$ PODE SER DETERMINADO, EM ALTERNATIVA, COMO $P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) =$

$$= \binom{30}{0} 0.02^0 \, 0.98^{30} + \binom{30}{1} 0.02 \, 0.98^{29} + \binom{30}{2} 0.02^2 \, 0.98^{28}$$