Ex.3.20

6 de dezembro de 2020 11:38

3.20. (*Exame 31.01.2012*) Um silvicultor sabe que a altura das árvores para madeira é importante para os compradores. Afirmou a um comprador que a altura média das suas árvores era 28 metros. O comprador fechou negócio, mas aquando do abate escolheu ao acaso 65 árvores e mediu as alturas. Obteve $\sum_{i=1}^{65} x_i^2 = 43959.32\ m^2$, onde x_i designa a altura de cada árvore seleccionada. O comprador obteve o seguinte intervalo de confiança para a altura média, em metros:

$$]25.1538; 26.5462[.$$

a) Calcule uma estimativa para a altura média das árvores daquela floresta.

b) Determine a confiança do intervalo dado acima.

c) Considera que o comprador tem razão para reclamar? Justifique.

d) Pretende-se construir um intervalo de confiança para a variância da altura das árvores.

i) Indique o estimador da variância usado na construção deste intervalo, apresentando a sua expressão.

ii) Com base nos resultados fornecidos construa o intervalo de confiança a 95% para a variância das alturas, indicando o(s) pressuposto(s) necessário(s).

X_i V.A. ALTURA DA ÁRVORE i EM METROS

observações: $\{x_1, x_2, \ldots, x_{65}\}$, COM $\sum_{i=1}^{65} x_i^2 = 43959.32\ m^2$

INT. A $(1-\alpha)\times 100\%$ DE CONFIANÇA PARA $\mu = E[X]$:

$$]25.1538 ; 26.5462[$$

a) Calcule uma estimativa para a altura média das árvores daquela floresta.

INTERVALOS DE CONFIANÇA (a $(1-\alpha) * 100\%$) PARA MÉDIAS, VARIÂNCIAS E PROPORÇÕES

Parâmetros	Condições	
μ	dist. normal e σ conhecido; ou n 'grande' (se σ desconh. usar s-desvio padrão amostral)	$\bar{x} - z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$

NESTE CASO, $\begin{cases} 25.1538 = \bar{x} - z_{\alpha/2} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \\ 26.5462 = \bar{x} + z_{\alpha/2} \dfrac{s}{\sqrt{n}} \end{cases}$

ENTÃO $\dfrac{25.1538 + 26.5462}{2} = \bar{x}$

OU SEJA $\bar{x} = 25.85\ m$ (25.1538+26.5462)/2=25.85

b) Determine a confiança do intervalo dado acima.

PRETENDE-SE DETERMINAR α

SABE-SE QUE $\bar{x} = 25.85$, $n = 65$

FALTA CALCULAR O DESVIO-PADRÃO s DAS OBSERVAÇÕES

$$s = \sqrt{\frac{n\sum x_i^2 - (n\bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{65 \times 43959.32 - (65 \times 25.85)^2}{64 \times 65}} = \sqrt{8.2} = 2.86 \text{ m}$$

((65*43959.32-((65*25.85)^2))/(64*65))=8.2009

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n(n-1)}$$, E $\sum x_i = n\bar{x}$

ENTÃO, USANDO UMA QUALQUER DAS 2 EQUAÇÕES ACIMA:

$25.1538 = \bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$, OU SEJA $25.1538 = 25.85 - z_{\alpha/2}\frac{2.86}{\sqrt{65}}$

E $z_{\alpha/2} = -(25.1538 - 25.85)\sqrt{65}/2.86 = 1.96$

-(25.1538-25.85)*sqrt(65)/2.86=1.96256777775015

USANDO A TABELA →
CONCLUI-SE QUE $\alpha/2 = 0.025$
E QUE $\alpha = 0.05$.

$z_\epsilon : P[Z > z_\epsilon] = \epsilon$

ϵ	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_ϵ	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

ASSIM O I.C. DADO CORRESPONDE A $95\% = (1-\alpha) \times 100\%$ DE CONFIANÇA

c) Considera que o comprador tem razão para reclamar? Justifique.

DADO QUE O I.C. A 95% DE CONFIANÇA PARA A ALTURA MÉDIA É]25.1538; 26.5462[. E NÃO INCLUI 28, ENTÃO, COM 95% DE CONFIANÇA, O COMPRADOR PODE AFIRMAR QUE $\mu = E[X] \neq 28$ m.

OBSERVAÇÃO: A QUESTÃO PODE SER RESPONDIDA, EM ALTERNATIVA, FAZENDO UM TESTE DE HIPÓTESE.

TESTES A MÉDIAS, VARIÂNCIAS E PROPORÇÕES

Parâmetros	Condições	H_0	H_1	Estatística	Região Crítica
μ	dist. normal e σ conhecido; ou n 'grande' (se σ desconhec. usar s-desvio padrão amostral)	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z < -z_{\alpha/2}$ ou $Z > z_{\alpha/2}$ $Z > z_\alpha$ $Z < -z_\alpha$

	usar s-desvio padrão amostral)	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\sigma/\sqrt{n}$	$Z < -z_\alpha$

NESTE CASO PRETENDE SE TESTAR SE A ALTURA MÉDIA DAS ÁRVORES É 28m

Passos a seguir na construção de um **teste estatístico**

1. Identificar o(s) parâmetro(s); especificar $\mathbf{H}_0$ **e** $\mathbf{H}_1$ e o nível de significância α.
2. Escolher uma variável aleatória – **Estatística de Teste**, que sob $\mathbf{H}_0$ terá distribuição conhecida (pelo menos aproximadamente).
3. Definir a **região de rejeição** ou **região crítica** – **RC** (conjunto de valores da estatística que são menos "plausíveis" caso $\mathbf{H}_0$ seja verdadeira, portanto levam a rejeitar $\mathbf{H}_0$).
4. Calcular **o valor** da estatística de teste, para a amostra observada.
5. Se o valor calculado $\in$ RC $\longrightarrow$ rejeita-se H_0
   o valor calculado $\notin$ RC $\longrightarrow$ não se rejeita H_0

1. O PARÂMETRO É μ.

$\underbrace{H_0: \mu = 28}_{\text{A HIPÓTESE } H_0 \text{ TEM SEMPRE O BENEFÍCIO DA DÚVIDA}}$ vs $\underbrace{H_1: \mu \neq 28}_{\text{A HIPÓTESE } H_1 \text{ TEM O ÓNUS DA PROVA}}$

2. A ESTATÍSTICA DE TESTE É A V.A. $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. SOB H_0, $Z \sim N(0,1)$.

3. A REGIÃO CRÍTICA É DADA POR $Z < -z_{\alpha/2}$ ou $Z > z_{\alpha/2}$

PARA $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

$z_\epsilon : P[Z > z_\epsilon] = \epsilon$

ϵ	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_ϵ	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

ENTÃO A REGIÃO CRÍTICA É $]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$

4. COMO $\bar{x} = 25.85$, $\mu_0 = 28$, $s = 2.86$ E $n = 65$ ENTÃO

$$z_{CALC} = \frac{25.85 - 28}{2.86/\sqrt{65}} = -6.06$$

(25.85-28)/(2.86/sqrt(65))=-6.060788167427227

POPULAÇÃO AMOSTRA

NOTA: DADO QUE n É GRANDE, CONSIDERA-SE QUE $\sigma \simeq s$.

5. COMO z_{CALC} PERTENCE À REGIÃO CRÍTICA, REJEITA-SE H_0 E CONCLUI-SE, COM NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA $\alpha = 0.05$, QUE A MÉDIA DAS ALTURAS DAS ÁRVORES É DIFERENTE DE 28 m.

d) Pretende-se construir um intervalo de confiança para a variância da altura das árvores.

i) Indique o estimador da variância usado na construção deste intervalo, apresentando a sua expressão.

O ESTIMADOR DO PARÂMETRO σ^2, SENDO

$\sigma^2 = VAR[X]$, É

VER FORMULÁRIO

$$\underset{\text{v.a.}}{S^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} \quad \text{e} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \frown \chi^2_{(n-1)}$$

ii) Com base nos resultados fornecidos construa o intervalo de confiança a 95% para a variância das alturas, indicando o(s) pressuposto(s) necessário(s).

A TABELA DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA INDICA

σ^2	distribuição normal	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;\,(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,(n-1)}}$

DADO QUE A AMOSTRA É GRANDE $(n = 65)$ PODE ADMITIR-SE QUE HÁ NORMALIDADE.

$1-\alpha = 0.95$; $\alpha = 0.05$; $\underset{\text{TABELA}}{\chi^2_{0.025;(64)} \simeq 87}$; $\underset{\text{TABELA}}{\chi^2_{0.975;(64)} \simeq 44}$

E $s^2 = 8.2$ (VER ACIMA)

n	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
60	31.738	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	52.294	59.335	66.981	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952	99.607
70	39.036	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	61.698	69.334	77.577	85.527	90.531	95.023	100.43	104.22	112.32

ASSIM, O IC A 95% PARA σ^2 É:

$$\left]\frac{64 \times 8.2}{87}, \frac{64 \times 8.2}{44}\right[= \left]6.033, 11.927\right[$$

64*8.2/87=6.0322

64*8.2/44=11.9273