INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

**ESTATÍSTICA E DELINEAMENTO – 2020-21**

**11 Janeiro 2021** **Primeira Chamada de EXAME** **Duração: 3h00**

**Aviso:** Justifique convenientemente as suas respostas.

## I [9 valores]

Um estudo sobre pastagens visou modelar a quantidade de matéria seca (variável `Produtividade`, em kg/ha). Dispunham-se de algumas potenciais variáveis preditoras de três tipos: composição química dos solos, composição das pastagens e um grande número de índices de vegetação, obtidos a partir de imagens de satélite. Foram obtidos valores de todas as variáveis em 47 diferentes locais no Alentejo.

1. Foi ajustado um modelo de regressão linear múltipla com transformação logarítmica da variável resposta `Produtividade` (sem transformação dos preditores). Eis alguns resultados:

```
Residual standard error: 0.3396 on 25 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7199,  Adjusted R-squared:  0.4846
F-statistic:  3.06 on 21 and 25 DF,  p-value: ????
```

   (a) Indique o número de variáveis preditoras usadas e comente a validade da seguinte afirmação: *"este modelo explica quase* 72% *da variabilidade das produtividades observadas"*.

   (b) Teste a qualidade do ajustamento do modelo e comente.

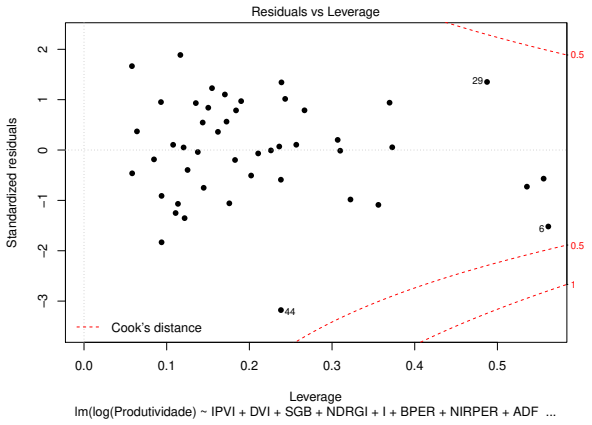
   (c) Um algoritmo de exclusão sequencial produziu um submodelo com os seguintes resultados.

```
Residual standard error: 0.2978 on 37 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6814,  Adjusted R-squared:  0.6039
F-statistic: 8.791 on 9 and 37 DF,  p-value: 6.413e-07
```

      i. Como se explica que, comparando com o modelo completo, haja uma subida considerável no valor do $R^2$ modificado, enquanto o $R^2$ usual diminui?

      ii. Teste formalmente se o ajustamento deste submodelo difere significativamente do ajustamento do modelo completo indicado inicialmente.

      iii. Descreva e comente o seguinte gráfico relativo ao submodelo agora ajustado. Sabe-se que a observação com a maior distância de Cook é a observação 44. Calcule, com base na informação disponível no gráfico, um valor *aproximado* dessa distância de Cook e comente-o.



2. Para as variáveis do submodelo, eis os respectivos valores mínimo, médio, máximo, do desvio padrão e *coeficiente de correlação linear com o logaritmo da produtividade*:

| | IPVI | DVI | SGB | NDRGI | I | BPER | NIRPER | ADF | NDF | log(Prod) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| mín | 0.55 | 20.65 | -14.89 | -0.03 | 164.89 | 0.25 | 0.45 | 366.37 | 568.52 | 6.087 |
| méd | 0.639 | 60.661 | 3.155 | 0.053 | 221.592 | 0.315 | 0.652 | 431.847 | 682.493 | 7.719 |
| máx | 0.75 | 115.64 | 31.89 | 0.15 | 317.02 | 0.38 | 0.96 | 546.03 | 804.55 | 8.639 |
| $s$ | 0.049 | 20.529 | 9.785 | 0.048 | 35.538 | 0.029 | 0.120 | 30.886 | 53.746 | 0.4731 |
| $r$ | 0.6291 | 0.6552 | -0.3048 | -0.0072 | -0.5461 | 0.301 | 0.6255 | 0.13 | 0.4409 | 1 |

   (a) Identifique o melhor preditor de log-produtividade numa regressão linear simples. Calcule a respectiva equação da recta de regressão e o valor do seu coeficiente de determinação.

   (b) Calcule a Soma de Quadrados Residual para a regressão que ajustou.
   **Nota:** Caso não o consiga calcular, pode usar o valor 5.90 no que se segue.

   (c) É possível afirmar que o declive da recta ajustada é significativamente maior que zero? Responda usando um teste de hipóteses.

   (d) Construa um intervalo a 95% de confiança para o valor esperado da log-produtividade, quando o valor do preditor for igual ao seu valor médio amostral.

   (e) Deduza a relação não linear entre a *produtividade* (em kg/ha) e o preditor que escolheu, correspondente à recta de regressão ajustada. Qual o valor estimado da taxa de variação relativa da produtividade como função do preditor que escolheu?

## **II** [5 valores]

Ensaios com a casta Vital foram realizados para determinar se o seu rendimento difere entre localidades e entre terrenos onde se pretende efectuar a produção. Foram ensaiados três diferentes locais: Bombarral, Cadaval e Caldas da Rainha. Em cada local foram utilizados oito terrenos, tendo os terrenos características de solos diferentes, quer em cada localidade, quer entre localidades. Cada terreno foi dividido em sete parcelas, tendo sido medido o rendimento em kg/planta obtido com a casta em cada parcela. A média dos 168 rendimentos observados foi 3.60162 kg/planta e a respectiva variância foi 3.08414 $(\text{kg/planta})^2$. O rendimento médio obtido no Bombarral foi 2.280, no Cadaval 4.361, e nas Caldas 4.164. Os rendimentos médios em cada um dos 24 terrenos foram os seguintes:

```
                        terrenos
Bombarral 1.823 2.080 2.270 2.694 2.030 2.696 2.331 2.313
Cadaval   5.772 3.994 3.718 4.617 5.357 4.048 3.639 3.742
Caldas    1.791 3.064 3.596 5.652 4.891 5.054 5.538 3.729
```

1. Identifique o delineamento experimental utilizado e descreva em pormenor o modelo ANOVA adequado.

2. Sabendo que o Quadrado Médio Residual é 1.673 e que o valor da estatística $F$ associada ao teste a efeitos de terreno é 3.592, complete a tabela de síntese do modelo ANOVA, indicando como obtém os valores em falta.

3. Teste se há efeitos significativos de localidade e comente a sua conclusão.

4. Foi importante ter utilizado diferentes terrenos em cada localidade? Responda, justificando brevemente através dum teste de hipóteses adequado.

5. O maior rendimento médio foi observado no primeiro terreno do Cadaval. Este rendimento é significativamente diferente dos rendimentos de quais outros terrenos, ao nível $\alpha = 0.05$?

## III [2 valores]

Foi realizado um estudo de afinidade à enxertia (viabilidade) de videiras da casta Azal, uma casta da região de Vinhos Verdes. Foram usados três diferentes porta-enxertos, designados 1103P, R110 e 196/17. O experimentador efectuou 1754 enxertos com o porta-enxertos 1103P; 1787 com o R110; e 1747 com o 196/17. Estas plantas foram para estratificação durante 3 semanas após o que foram plantadas em viveiro. Passado algum tempo, fez-se a contagem do número de plantas viáveis (comercializáveis). Eis os resultados obtidos.

| Porta-enxerto | Plantas viáveis | Plantas não viáveis | Total |
|---|---|---|---|
| 1103P | 1226 | 528 | 1754 |
| R110 | 1295 | 492 | 1787 |
| 196/17 | 1357 | 390 | 1747 |
| Total | 3878 | 1410 | 5288 |

Pretende-se saber se é possível afirmar que os porta-enxertos têm igual desempenho no que respeita à afinidade à enxertia (viabilidade).

1. Identifique o tipo de Teste de Hipóteses a efectuar. Em particular, escreva as Hipóteses em confronto.
2. Calcule a contribuição para o valor da estatística de teste das plantas não viáveis do porta-enxertos `196/17`.
3. Sabendo que o valor calculado da estatística de teste é $X^2_{calc} = 28.123$, qual a sua conclusão ao nível de significância $\alpha = 0.05$?

## IV [4 valores]

1. Considere o modelo ANOVA a um factor, com $k$ níveis e $n_i$ observações da variável resposta $Y$ no nível $i$ do factor.
   (a) Caracterize a matriz do modelo $\mathbf{X}$.
   (b) Mostre que para qualquer vector do espaço das colunas $\mathcal{C}(\mathbf{X})$, os elementos nas posições correspondentes a observações dum mesmo nível do factor são todos iguais.
2. Considere uma regressão linear múltipla, com $p$ preditores e ajustada com base em $n$ observações.
   (a) Escreva o Modelo de regressão linear múltipla *usando notação vectorial/matricial.*
   (b) Deduza a distribuição do vector aleatório das observações da variável resposta, $\vec{\mathbf{Y}}$, ao abrigo do modelo.
3. Considere uma generalização do modelo de regressão linear múltipla, em que a matriz de covariâncias do vector de erros aleatórios seja uma matriz simétrica *genérica* $\Sigma$, admitida conhecida.

(a) A que corresponde admitir que a matriz $\Sigma$ *não* é uma matriz diagonal (ou seja, que haja elementos não nulos fora da diagonal principal)?

(b) Sabendo que a distribuição de probabilidades do vector $\vec{\mathbf{Y}}$ é agora $\mathcal{N}_n(\,\mathbf{X}\vec{\boldsymbol{\beta}}\,,\,\Sigma\,)$, deduza a distribuição de probabilidades do vector usual de estimadores, $\hat{\vec{\boldsymbol{\beta}}} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{\mathbf{Y}}$. Os estimadores são centrados?