4. (**4.5 val.**) Um filtro de ar é instalado para remover partículas sólidas numa zona de uma empresa.

X VA O número de partículas capturadas numa amostra de ar segue uma distribuição de Poisson com valor médio 6.

a) Calcule a probabilidade de numa amostra de ar serem capturadas mais de 8 partículas.

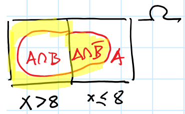
b) Suponha que, quando o filtro captura mais de 8 partículas, um alarme é accionado com probabilidade 0.9. Quando 8 ou menos partículas são capturadas o alarme é accionado com probabilidade 0.01.

i) Determine a probabilidade de o alarme ser accionado.

ii) Qual é a probabilidade de haver falha no sistema de alarme?

$X \frown \mathcal{P}(\lambda = 6)$

$P(X > 8) = 0.1527$



A ACONT. DISPARA ALARME

SEJA B O ACONTECIMENTO HAVER MAIS DE 8 PARTÍCULAS $(X > 8)$

DADOS DO PROBLEMA : $P(A/B) = 0.9$

$P(A/\overline{B}) = 0.01$

NA ALÍNEA a) DETERMINOU-SE $P(B) = 0.1527$

A3:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Se $A \cap B = \emptyset$

DEF
$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

i) PEDE-SE $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A/B) \cdot P(B) + P(A/\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$

$= 0.9 \times 0.1527 + 0.01 \times (1 - 0.1527) = 0.1459$.

0.9*0.1527+0.01*(1-0.1527)=0.1459

ii) $\boxed{P(B \cap \overline{A}) + P(\overline{B} \cap A)} = 0.01527 + P(A/\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = 0.01527 + 0.01 \times (1 - 0.1527)$

C.A. $P(B \cap \overline{A}) = P(\overline{A}/B) \cdot P(B) = (1 - P(A/B)) \cdot P(B) = (1 - 0.9) \cdot 0.1527$
$= 0.01527$

$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) \qquad \text{se } P(B) \neq 0$$

c) Em duas amostras de ar recolhidas de forma independente, qual é a probabilidade de no total serem capturadas 13 partículas?

d) Na empresa estão instalados, em locais distintos, 40 filtros de ar idênticos. Para responder às perguntas que se seguem, considere que cada filtro atua sobre uma única amostra de ar.

i) Determine a probabilidade, aproximada, de a média do número de partículas capturadas por filtro de ar ser inferior a 7.

ii) Qual é a probabilidade, aproximada, de serem capturadas mais de 8 partículas em pelo menos 5 filtros?

c) X Nº PARTÍCULAS NUMA AMOSTRA $X \frown \mathcal{P}(\lambda = 6)$

COMO AS V.A X_1, X_2 SÃO INDEP

ENTÃO $X_1 + X_2 \frown \mathcal{P}(\lambda = 6 + 6)$

Teorema 7–Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a. $X_i \quad i = 1, \ldots, k$ são independentes e $X_i \frown \mathcal{P}(\lambda_i)$ então

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \frown \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right).$$

PEDE-SE $\underbrace{P(X_1+X_2}_{\sim \mathcal{P}(12)}=13) = P(X_1+X_2 \leq 13) - P(X_1+X_2 \leq 12)$

$= 0.682 - 0.576$

$= 0.106$

	$\lambda = E[X]$									
x	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10	11	12
0	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.001	0.001
3	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.005	0.002
4	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.015	0.008
5	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.038	0.020
6	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.079	0.046
7	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.143	0.090
8	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.232	0.155
9	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.341	0.242
10	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.460	0.347
11	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.579	0.462
12	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.689	0.576
13	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864	0.781	0.682

$P(X_1+X_2 \leq 12)$

$P(X_1+X_2 \leq 13)$

d) Na empresa estão instalados, em locais distintos, 40 filtros de ar idênticos. Para responder às perguntas que se seguem, considere que cada filtro atua sobre uma única amostra de ar.

i) Determine a probabilidade, aproximada, de a média do número de partículas capturadas por filtro de ar ser inferior a 7.

ii) Qual é a probabilidade, aproximada, de serem capturadas mais de 8 partículas em pelo menos 5 filtros?

"SUCESSO"

PROVAS

$X_i \sim \mathcal{P}(6)$, X_i Nº PARTÍCULAS NO i-ÉSIMO FILTRO

i) $\overline{X}_{40} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{40}}{40}$

SUPONDO QUE $X_1, \ldots, X_{40}$ SÃO V.A. INDEPENDENTES,

Teorema Limite Central

Sejam $X_1, \ldots, X_n$, v.a.'s independentes e identicamente distribuídas com valor médio μ e variância σ^2 (finita).

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tem-se, c/ n grande

$\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

COMO $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda = 6)$

ENTÃO

$\mu = E[X_i] = \lambda = 6$

$\sigma = \sqrt{VAR[X_i]} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{6}$

Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \ldots$	$\lambda > 0$	λ	λ

ENTÃO, $\dfrac{\overline{X}_{40} - 6}{\sqrt{6}/\sqrt{40}} \sim N(0,1)$

$P(\overline{X}_{40} < 7) = P\left(\underbrace{\dfrac{\overline{X}_{40} - 6}{\sqrt{6}/\sqrt{40}}}_{Z \sim N(0,1)} < \underbrace{\dfrac{7-6}{\sqrt{6}/\sqrt{40}}}\right)$

1/(sqrt(6/40))=2.5819888974716112

$\simeq P(Z < 2.58) = \phi(2.58) = 0.995$

TABELA NORMAL

ii) Y V.A Nº DE FILTROS COM MAIS DE 8 PARTÍCULAS EM $n = 40$ FILTROS

SUCESSO

PROVAS

SE SÃO PROVAS DE BERNOULLI INDEPENDENTES,

ENTÃO $Y \frown B(n=40, p=0.1527)$

PEDE-SE $P(Y \geq 5)$

$$X \frown \mathcal{B}(n,p),\ n \geq 20 \text{ e } p \leq 0.05 \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ com } \lambda = np$$

$$X \frown \mathcal{B}(n,p),\ np > 5 \text{ e } nq > 5 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$$

$$\text{com } \mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$$

40*0.1527=6.108
Sqrt(40*0.1527*(1-0.1527))=2.274930416518272

COMO $n \times p = 40 \times 0.1527 \simeq 6 > 5$

$n \times q = 40(1-0.1527) > 5$

ENTÃO $Y \sim \mathcal{N}(\mu = 6.108, \sigma = 2.2749)$

$\mu = np = 6.108$

$\sigma = \sqrt{npq} = 2.2749$

$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y < 5) = 1 - P(Y \leq 4)$

$= 1 - P(Y \leq 4.5) \simeq 1 - \phi\left(\frac{4.5 - 6.108}{2.2749}\right)$

C.C.

APROX. DA BINOMIAL PELA NORMAL

C.C.

$\boxed{P(Y \leq 4) = P(Y \leq 4.5)}$

$= \phi(0.7) = 0.758$

(4.5-6.108)/2.2749=-0.7068

TABELA NORMAL