2a chamada 2018 2019 perg 5

19 de janeiro de 2021 18:15

5. (2.5 val.)

a) Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de dimensão retirada de uma população X com valor médio μ e variância σ^2. Seja $\overline{X}$ a média da amostra aleatória.

Determine a covariância e o coeficiente de correlação entre X_1 e $\overline{X}$, em função dos valores dados.

b) Seja (X, Y), um par aleatório discreto tomando valores $(x_i, y_j), i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots, m$. Considere $Y = y_0$, fixo, com $P[Y = y_0] > 0$. Escreva a distribuição condicional de $X|Y = y_0$ e prove que as probabilidades associadas somam 1.

c) Seja X uma variável aleatória contínua com distribuição uniforme em $]0, 1[$. Prove que $Y = -ln(X)$ tem distribuição exponencial e indique os seus parâmetros.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad E[X_i] = \mu, \quad VAR[X_i] = \sigma^2$$

$$COV[X_1, \bar{X}] = COV\left[X_1, \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \dots + \frac{1}{n}X_n\right]$$

$$= COV\left[X_1, \frac{1}{n}X_1\right] + COV\left[X_1, \frac{1}{n}X_2\right] + \dots + COV\left[X_1, \frac{1}{n}X_n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\underbrace{COV[X_1, X_1]}_{VAR[X_1]} + \frac{1}{n}\underbrace{COV[X_1, X_2]}_{=0} + \dots + \frac{1}{n}\underbrace{COV[X_1, X_n]}_{=0}$$

$$= \frac{1}{n}\sigma^2$$

$$VAR[\bar{X}] = VAR[X_1] + \dots + VAR[X_n] = \sigma^2 + \dots + \sigma^2 = n\sigma^2$$

$$\rho_{XY} = \frac{COV[X_1, \bar{X}]}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{\bar{X}}} = \frac{\frac{1}{n}\cancel{\sigma^2}}{\cancel{\sigma} \times \sqrt{n\cancel{\sigma^2}}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{X,Y} = Cov[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y] \quad (\mu_X = E[X], \mu_Y = E[Y])$$
$$Var[X \pm Y] = Var[X] + Var[Y] \pm 2\, Cov[X, Y]$$

$$Cov[a + bX, c + dY] = \underline{bd}\, Cov[X, Y] \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$
$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad \sigma_X, \sigma_Y \neq 0$$
$$\rho_{a+bX, c+dY} = \rho_{X,Y} \text{ se } bd > 0 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

b) Seja (X,Y), um par aleatório discreto tomando valores $(x_i, y_j), i = 1, \ldots n$, $j = 1, \ldots, m$. Considere $Y = y_0$, fixo, com $P[Y = y_0] > 0$. Escreva a distribuição condicional de $X|Y = y_0$ e prove que as probabilidades associadas somam 1.

<u>Par aleatório (X,Y) discreto</u> com função massa de probabilidade conjunta $\quad P[X = x_i, Y = y_j] = p_{ij}$

marginais $\quad p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij} \qquad p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$

condicional $\quad P[X = x_i|Y = y_j] = \dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ ← PROB MARGINAL DE Y

$$P(X = x_i \mid Y = y_0) = \frac{P(X = x_i, Y = y_0)}{\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_0)}, \quad i = 1, \ldots, n$$

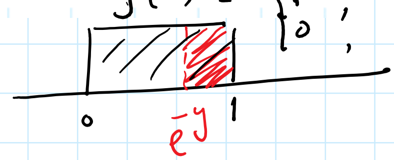
MOSTRAR QUE $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \mid Y = y_0) = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(X = x_i, Y = y_0)}{\left(\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i, Y = y_0)\right)} =$$ ← DEPENDE DE i

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \cancel{P(X = x_i, Y = y_0)}} \sum_{i=1}^{n} \cancel{P(X = x_i, Y = y_0)} = 1$$

c) Seja X uma variável aleatória contínua com distribuição uniforme em $]0,1[$. Prove que $Y = -ln(X)$ tem distribuição exponencial e indique os seus parâmetros.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$



$$P(X \le x) = F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

$$P(Y \le y) = P(\overbrace{-\ln X}^{\ge 0} \le y) = P(X \ge e^{-y}) =$$

$$= 1 - P(X \le e^{-y}) = 1 - F(e^{-y}) = 1 - e^{-y}$$

MOSTROU-SE QUE $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1 - e^{-y}$

MOSTROU-SE QUE $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - e^{-y}$

E $f_Y(y) = \left(1 - e^{-y}\right)' = e^{-y}, \quad y \geq 0$

O QUE É A FUNÇÃO DENSIDADE DE UMA V.A. COM DIST. EXP. DE PARÂMETRO $\beta = 1$.

Exponencial	$\begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$