

Análise Matemática – Aula Prática 15

Adelino Paiva

Instituto Superior de Agronomia

Equações diferenciais

Uma equação diferencial é uma equação cujas incógnitas são funções e cujas operações são as de funções como a soma, o produto, ou a derivação.

Exemplos.

- $y' = 2x$

soluções: $y = x^2 + c$

- $y'' = 2$

soluções: $y = x^2 + ax + b$

- $y' = y$

soluções: $y = c e^x$

- $y'' = -y$

soluções: $y = a \cos x + b \sin x$

Uma equação diferencial diz-se de primeira ordem, se a maior ordem da derivada for 1. Nos exemplos anteriores, a primeiras duas equações são de primeira ordem. As outras duas são de segunda ordem.

Resolver uma equação diferencial é encontrar todas as funções que são solução dessa equação.

As equações diferenciais são intensamente estudadas porque muitas das leis da física, engenharia, biologia, ou química exprimem-se por meio de equações diferenciais.

Exemplos de equações diferenciais

1º A derivação

$$y' = f(x) \Leftrightarrow y = P[f(x)] + c.$$

2º Equação diferencial linear de primeira ordem

$$\begin{aligned} y' + g(x)y &= f(x) \stackrel{*}{\Leftrightarrow} e^{P[g(x)]}y' + e^{P[g(x)]}g(x)y = e^{P[g(x)]}f(x) \\ &\stackrel{\dagger}{\Leftrightarrow} e^{P[g(x)]}y' + \left(e^{P[g(x)]}\right)'y = e^{P[g(x)]}f(x) \\ &\stackrel{\ddagger}{\Leftrightarrow} \left(e^{P[g(x)]}y\right)' = e^{P[g(x)]}f(x) \\ &\stackrel{\S}{\Leftrightarrow} e^{P[g(x)]}y = P\left[e^{P[g(x)]}f(x)\right] + c \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} y = e^{-P[g(x)]}\left(P\left[e^{P[g(x)]}f(x)\right] + c\right). \end{aligned}$$

* a exponencial de um número é sempre não nula,

† derivação da função composta (formulário 1.1.3 caso particular de 1.2.5),

‡ regra de Leibniz (formulário 1.2.3),

§ por 1º.