

Análise Matemática – Aula Prática 20

Adelino Paiva

Instituto Superior de Agronomia

Teorema (Critério da matriz Hessiana)

Seja f uma função com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas, (a, b) um ponto crítico de f , e $\Delta = \det H_f(a, b) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{yx}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$.

- ❶ Se $\Delta > 0$ e $f''_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é um mínimo local;
- ❷ Se $\Delta > 0$ e $f''_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é um máximo local;
- ❸ Se $\Delta < 0$, então (a, b) é um ponto de sela;
- ❹ Se $\Delta = 0$, então o teste é inconclusivo.

A demonstração do teorema envolve os valores próprios da matriz $H_f(a, b)$.

O teorema anterior pode ser expresso em termos dos valores próprios de $H_f(a, b)$ com vantagem. Com efeito, da álgebra linear sabe-se que o determinante é o produto dos valores próprios e que os valores próprios de matrizes simétricas são reais. Daí, dá para provar as seguintes equivalências

- ① ambos os valores próprios são positivos sse $\Delta > 0$ e $f''_{xx}(a, b) > 0$;
- ② ambos os valores próprios são negativos sse $\Delta > 0$ e $f''_{xx}(a, b) < 0$;
- ③ os valores próprios têm sinais contrários sse $\Delta < 0$;
- ④ um dos valores próprios é nulo sse $\Delta = 0$.

A vantagem advém de agora ter-se a seguinte mnemónica fácil.

Extremos livres

Mnemónica que só tem olhos para os valores próprios da matriz Hessiana.

Ambos positivos – feliz



os lábios formam um mínimo.

Ambos negativos – triste



os lábios formam um máximo.

Sinais contrários – confuso



ponto de sela.

Um deles nulo – indiferente



inconclusivo.