Exercícios - Modelos Matemáticos e Aplicações - 2022-23

2 Regressão Linear

EXERCÍCIOS

1. O repositório de dados (`http://archive.ics.uci.edu/ml/`) da Universidade da Califórnia, Irvine, contém muitos conjuntos de dados em formato *comma separated value (csv)*, que podem ser facilmente lidos através do comando `read.csv` da aplicação R. Considere o conjunto de dados "Wine recognition data" desse repositório (fonte: Forina, M. et al, *PARVUS - An Extendible Package for Data Exploration, Classification and Correlation.* Institute of Pharmaceutical and Food Analysis and Technologies, Via Brigata Salerno, 16147 Genoa, Italy) que contém os resultados da análise química de vinhos de três castas de uma determinada região de Itália. As 14 colunas da tabela de dados correspondem respectivamente às variáveis casta (factor V1 com 3 níveis, que será ignorado neste Exercício), teor alcoólico (V2), teor de ácido málico (V3), cinzas (V4), alcalinidade das cinzas (V5), teor de magnésio (V6), índice de fenóis totais (V7), teor de flavonóides (V8), teor de outros fenóis (V9), teor de proantocianidinas (V10), intensidade de cor (V11), matiz (V12), razão de densidades ópticas em duas frequências, OD280/OD315, (V13) e teor de prolina (V14).

   Proceda à leitura dos dados de duas formas:
   - através do comando

   ```
   vinhos<-read.csv("http://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/wine/wine.data",
                                                                          header=FALSE)
   ```

   - guardando os dados do ficheiro `vinhos.csv`, disponível na página *web* da disciplina, numa *data frame* de nome `vinhos`.

   Há interesse em modelar o teor de flavonóides (variável `V8`), um antioxidante de medição difícil e dispendiosa.

   (a) Execute o comando `plot(vinhos)` e comente o resultado.

   (b) Efectue um teste de ajustamento global do modelo de regressão linear simples do teor de flavonóides (`V8`) sobre o teor alcoólico (`V2`). Comente o resultado tendo em conta o valor do coeficiente de determinação e a nuvem de pontos das observações para essas duas variáveis. Determine o valor das três Somas de Quadrados associadas a esta regressão.

   (c) A partir da matriz de correlações entre as variáveis sob estudo, diga qual a melhor recta de regressão simples para prever o teor de flavonóides (variável `V8`). Para a regressão linear simples que escolher, determine o coeficiente de determinação e realize a correspondente decomposição da soma dos quadrados total.

   (d) A variável preditora utilizada na alínea anterior também não é simples de medir, tal como sucede com as variáveis `V9` e `V10`. Foi sugerido procurar um modelo de regressão linear múltipla para a variável resposta teor de flavonóides (`V8`) que não utiliza esses preditores. Foi proposto um modelo com cinco variáveis preditoras: `V4`, `V5`, `V11`, `V12` e `V13`. Ajuste este modelo, e comente o respectivo coeficiente de determinação, comparando-o com o R^2 do modelo da alínea anterior. O comando do `R` para ajustar esta regressão linear múltipla é:

```
> lm(V8 ~ V4 + V5 + V11 + V12 + V13 , data=vinhos)
```

(e) Ajuste uma regressão linear múltipla do teor de flavonóides (variável `V8`) sobre todas as restantes variáveis com o comando `summary(lm(V8 ∼ . , data=vinhos[,-1]))`.

i. Use o valor do coeficiente de determinação obtido com esse comando para determinar a decomposição da soma dos quadrados totais. Comente os resultados.

ii. Compare os coeficientes estimados das variáveis preditoras com os correspondentes coeficientes das variáveis preditoras presentes nos modelos anteriores. Comente.

(f) Utilize o algoritmo de exclusão sequencial para obter um bom submodelo de regressão linear múltipla para a previsão do teor de flavonóides (variável `V8`), partindo do modelo de regressão linear múltipla com todas as restantes variáveis como preditores (o modelo considerado na alínea e)). Comente a qualidade do submodelo que escolheu.

(g) Efectue um teste F parcial para comparar o submodelo que obteve com o modelo completo da alínea e). Comente os seus resultados.

2. Num estudo sobre framboesas realizado na Secção de Horticultura do ISA foram analisados frutos de 14 plantas diferentes, no que respeita a 6 diferentes variáveis. As variáveis observadas foram: (i) o *diâmetro* dos frutos (em *cm*); (ii) a sua *altura* (em *cm*); (iii) o seu *peso* (em *g*); (iv) o seu teor de sólidos solúveis, *brix* (em graus Brix); (v) o seu *pH*; (vi) o seu teor de *açúcar*, exceptuando a sacarose (em $g/100ml$). Os resultados médios de cada variável, para as framboesas de cada planta são:

	Diametro	Altura	Peso	Brix	pH	Acucar
1	2.0	2.1	3.71	8.4	2.78	5.12
2	2.1	2.0	3.79	8.4	2.84	5.40
3	2.0	1.7	3.65	8.7	2.89	5.38
4	2.0	1.8	3.83	8.6	2.91	5.23
5	1.8	1.8	3.95	8.0	2.84	3.44
6	2.0	1.9	4.18	8.2	3.00	3.42
7	2.1	2.2	4.37	8.1	3.00	3.48
8	1.8	1.9	3.97	8.0	2.96	3.34
9	1.8	1.8	3.43	8.2	2.75	2.02
10	1.9	1.9	3.78	8.0	2.75	2.14
11	1.9	1.9	3.42	8.0	2.73	2.06
12	2.0	1.9	3.60	8.1	2.71	2.02
13	1.9	1.7	2.87	8.4	2.94	3.86
14	2.1	1.9	3.74	8.8	3.20	3.89

(a) Crie uma *data frame* de nome `brix`.

(b) Construa as nuvens de pontos correspondentes a cada possível par de variáveis. Calcule os coeficientes de correlação correspondentes a cada gráfico. Comente.

(c) Pretende-se modelar o teor de *Brix* a partir das restantes variáveis observadas. Escreva a equação de base do modelo de regressão linear múltipla com *Brix* como variável resposta e as restantes variáveis como preditoras. Quantos parâmetros tem este modelo?

(d) Determine o valor das estimativas dos parâmetros do modelo indicado na alínea anterior.

(e) Discuta o significado biológico do coeficiente ajustado da variável *Peso*. Quais são as unidades de medida desta estimativa?

(f) Discuta o significado da ordenada na origem b_0 resultante do ajustamento. Comente.

(g) Discuta o coeficiente de determinação do modelo. Em particular, compare o coeficiente de determinação da regressão múltipla com os coeficientes de determinação associados às regressões lineares simples (com a mesma variável resposta) da alínea 2b). Comente.

(h) Utilize o comando `model.matrix` do `R` para construir a matriz $\mathbf{X}$ do modelo. Com base nessa matriz, obtenha o vector $\vec{\mathbf{b}}$ dos parâmetros ajustados, através da sua fórmula, $\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^t\vec{\mathbf{y}})$, onde $\vec{\mathbf{y}}$ é o vector das observações da variável resposta.

3. Considere o conjunto de dados `iris`, disponível no `R`. Considere apenas as observações das quatro variáveis morfométricas: largura e comprimento de pétalas e sépalas (todas em cm) em $n = 150$ lírios.

(a) Construa as nuvens de pontos para cada possível par de variáveis. Comente.

(b) Ajuste uma regressão linear múltipla da largura das pétalas sobre as restantes três variáveis preditoras. Comente o coeficiente de determinação obtido.

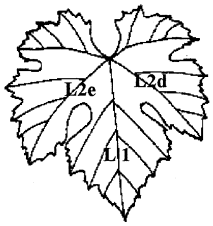
(c) Interprete os valores das estimativas dos coeficientes de cada uma das variáveis preditoras.

(d) Considere o sinal do parâmetro b_j associado ao preditor `Sepal.Length`, na regressão linear múltipla acima ajustada. Tendo em conta a nuvem de pontos relacionando a variável resposta `Petal.Width` com o preditor `Sepal.Length`, obtida na alínea 3a), qual seria o sinal do declive nessa recta de regressão? Comente.

(e) Construa os intervalos a 95% de confiança para β_1, β_2 e β_3. Comente.

(f) Teste se é admissível considerar que um aumento no comprimento das sépalas, mantendo os restantes preditores fixos, está associado a uma diminuição na largura média das pétalas.

4. A medição rigorosa de áreas foliares faz-se através de técnicas destrutivas. Deseja-se obter um modelo que permita estimar áreas foliares de castas de videiras, utilizando variáveis preditoras que possam ser medidas sem arrancar as folhas da videira. Na Secção de Horticultura do ISA foram seleccionadas aleatoriamente 200 folhas de cada uma de três castas: Fernão Pires, Vital e Água Santa. Em cada folha mediu-se a área foliar (variável **(Área)**, em cm^2), comprimento da nervura principal da folha (variável **(NP)**, em cm), o comprimento da nervura lateral esquerda (variável **(NLesq)**, em cm) e o comprimento da nervura lateral direita (variável **(NLdir)**, em cm). Os dados estão no ficheiro `videiras.csv`, disponível na página *web* da disciplina. Responda às seguintes alíneas para o conjunto dos 600 pares de observações, não distinguindo as castas.



(a) Desenhe as nuvens de pontos para cada par das 4 variáveis observadas. Comente.

(b) Calcule a matriz de correlações entre todos os pares de variáveis observadas. Comente.

(c) Descreva o Modelo de regressão linear múltipla resultante de modelar `Area` com base nos três preditores disponíveis.

(d) Ajuste a regressão múltipla referida na alínea anterior e comente. Em particular, teste o ajustamento global do modelo.

(e) Admitindo a validade do modelo, teste, com um nível de significância de $\alpha = 0.01$, a hipótese de que, a cada centímetro adicional na nervura principal (e sem alterar os comprimentos das nervuras laterais) corresponda um aumento médio da área foliar de 7 cm^2. Repita o teste, mas agora utilizando um nível de significância $\alpha = 0.05$. Comente.

(f) Será admissível considerar que os coeficientes das duas nervuras laterais são iguais? Justifique formalmente.

(g) Estude os resíduos do ajustamento efectuado, bem como os restantes diagnósticos. Comente.

(h) Ajuste uma regressão linear múltipla análoga, mas logaritmizando previamente as quatro variáveis. Diga, justificando, a qual relação de fundo entre as quatro variáveis originais corresponde o modelo agora ajustado.

(i) Efectue o estudo dos resíduos e restantes quantidades de diagnóstico do modelo ajustado na alínea anterior. Compare com os gráficos obtidos na alínea 4g) e comente.

5. No relatório CAED – Report 17, Iowa State University, 1963, são mostrados os seguintes dados meteorológicos e de produção de milho para o estado de Iowa (EUA), nos anos 1930–1962. Estes dados estão no ficheiro `milho.csv`, disponível na página *web* da disciplina.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y
Ano		Prec. 'pré-estação' (in.)	Temp. Maio (^{o}F)	Prec. Junho (in.)	Temp. Junho (^{o}F)	Prec. Julho (in.)	Temp. Julho (^{o}F)	Prec. Agosto (in.)	Temp. Agosto (^{o}F)	Prod. milho (bu/acre)
1930	1	17.75	60.2	5.83	69.0	1.49	77.9	2.42	74.4	34.0
1931	2	14.76	57.5	3.83	75.0	2.72	77.2	3.30	72.6	32.9
1932	3	27.99	62.3	5.17	72.0	3.12	75.8	7.10	72.2	43.0
1933	4	16.76	60.5	1.64	77.8	3.45	76.1	3.01	70.5	40.0
1934	5	11.36	69.5	3.49	77.2	3.85	79.7	2.84	73.4	23.0
1935	6	22.71	55.0	7.00	65.9	3.35	79.4	2.42	73.6	38.4
1936	7	17.91	66.2	2.85	70.1	0.51	83.4	3.48	79.2	20.0
1937	8	23.31	61.8	3.80	69.0	2.63	75.9	3.99	77.8	44.6
1938	9	18.53	59.5	4.67	69.2	4.24	76.5	3.82	75.7	46.3
1939	10	18.56	66.4	5.32	71.4	3.15	76.2	4.72	70.7	52.2
1940	11	12.45	58.4	3.56	71.3	4.57	76.7	6.44	70.7	52.3
1941	12	16.05	66.0	6.20	70.0	2.24	75.1	1.94	75.1	51.0
1942	13	27.10	59.3	5.93	69.7	4.89	74.3	3.17	72.2	59.9
1943	14	19.05	57.5	6.16	71.6	4.56	75.4	5.07	74.0	54.7
1944	15	20.79	64.6	5.88	71.7	3.73	72.6	5.88	71.8	52.0
1945	16	21.88	55.1	4.70	64.1	2.96	72.1	3.43	72.5	43.5
1946	17	20.02	56.5	6.41	69.8	2.45	73.8	3.56	68.9	56.7
1947	18	23.17	55.6	10.39	66.3	1.72	72.8	1.49	80.6	30.5
1948	19	19.15	59.2	3.42	68.6	4.14	75.0	2.54	73.9	60.5
1949	20	18.28	63.5	5.51	72.4	3.47	76.2	2.34	73.0	46.1
1950	21	18.45	59.8	5.70	68.4	4.65	69.7	2.39	67.7	48.2
1951	22	22.00	62.2	6.11	65.2	4.45	72.1	6.21	70.5	43.1
1952	23	19.05	59.6	5.40	74.2	3.84	74.7	4.78	70.0	62.2
1953	24	15.67	60.0	5.31	73.2	3.28	74.6	2.33	73.2	52.9
1954	25	15.92	55.6	6.36	72.9	1.79	77.4	7.10	72.1	53.9
1955	26	16.75	63.6	3.07	67.2	3.29	79.8	1.79	77.2	48.4
1956	27	12.34	62.4	2.56	74.7	4.51	72.7	4.42	73.0	52.8
1957	28	15.82	59.0	4.84	68.9	3.54	77.9	3.76	72.9	62.1
1958	29	15.24	62.5	3.80	66.4	7.55	70.5	2.55	73.0	66.0
1959	30	21.72	62.8	4.11	71.5	2.29	72.3	4.92	76.3	64.2
1960	31	25.08	59.7	4.43	67.4	2.76	72.6	5.36	73.2	63.2
1961	32	17.79	57.4	3.36	69.4	5.51	72.6	3.04	72.4	75.4
1962	33	26.61	66.6	3.12	69.1	6.27	71.6	4.31	72.5	76.0

(a) Ajuste um Modelo Linear para prever a produção de milho (em *bu/acre*), utilizando a totalidade das restantes variáveis como variáveis preditoras. Comente os resultados. Estude os gráficos de resíduos e outros diagnósticos.

(b) Determine o valor do R^2 modificado. Comente.

(c) Repita o ajustamento da primeira alínea, mas agora excluíndo a variável cronológica x_1 do conjunto de variáveis preditoras. Compare os resultados do ajustamento nos dois casos. Comente.

(d) Utilize um teste t ao coeficiente β_1 no modelo com todos os preditores, para ver se é possível concluir que os modelos com e sem o preditor x_1 têm ajustamento significativamente diferente.

(e) Utilize um teste F parcial para responder à pergunta da alínea anterior. Compare os *p-values* obtidos nestes dois testes e discuta a sua relação.

(f) Com base apenas no ajustamento do modelo completo, efectuado na alínea 5a), diga, justificando:

i. Qual a variável preditora cuja exclusão do modelo menos afectaria a qualidade do modelo?

ii. Qual o coeficiente de determinação do submodelo resultante da exclusão dessa variável?

(g) Teste se o modelo com todas as variáveis preditoras e o modelo apenas com as variáveis preditoras que sejam conhecíveis até ao fim do mês de Junho diferem significativamente. Comente.

(h) Identifique um modelo mais parcimonioso, utilizando o método de exclusão sequencial de variáveis baseado nos testes a $\beta_j = 0$ ($\alpha = 0.10$). Repita, usando como critério de selecção o valor do Critério de Informação de Akaike (AIC). Efectue ainda uma pesquisa completa dos subconjuntos de cada cardinalidade, usando a função `leaps` do módulo `R` de igual nome.

(i) No ajustamento do modelo escolhido na alínea anterior, mude as unidades de medida das variáveis como indicado de seguida e proceda a novo ajustamento do modelo. Comente eventuais alterações nos resultados.

$$z^{\circ}\mathrm{F} = \tfrac{5}{9}(z-32)^{\circ}\mathrm{C}$$

Conversões:

$$1\ in = 25{,}4\ \mathrm{mm}$$

$$1\ \mathrm{bu/acre\ (milho)} = 0.06277\ \mathrm{t\ ha^{-1}}$$

6. Pretende-se estudar a evolução de características relacionadas com a frutificação de amoras (*Rubus spp.*), e concretamente modelar o número de frutos vingados por cacho (variável `v`) à custa de outras variáveis preditoras. Como potenciais preditores consideraram-se as variáveis: comprimento dos lançamentos frutíferos (variável `cl`, em cm); distância ao solo de cada cacho (variável `dl`, em cm); comprimento do raquis, ou seja, do eixo central do cacho (variável `r`, em cm); número de botões por cacho (variável `b`). Num primeiro estudo, foram efectuadas 64 observações destas variáveis, para uma única cultivar. As médias e variâncias para cada variável, bem como a matriz de correlações amostrais observadas, foram:

	v	cl	dl	b	r
Médias	16.43750	440.25000	285.79688	17.53125	27.60938
Variâncias	54.85317	12187.61905	25473.40253	63.64980	139.89261

```
          cl           dl          b         v          r
cl 1.0000000  0.484277382 0.132235969 0.1452308  0.4348473
dl 0.4842774  1.000000000 0.002753756 0.1014318 -0.1313583
b  0.1322360  0.002753756 1.000000000 0.9555627  0.6597847
v  0.1452308  0.101431793 0.955562651 1.0000000  0.5783831
r  0.4348473 -0.131358261 0.659784745 0.5783831  1.0000000
```

(a) Considere o modelo de regressão linear múltipla para a variável resposta `v`, com as quatro restantes variáveis como preditoras. Qual o intervalo de menor amplitude onde pode garantir, com base na informação disponível até aqui, que está contido o coeficiente de determinação? Justifique e comente o seu resultado.

(b) Foi ajustada uma regressão linear múltipla para a totalidade das variáveis preditoras acima referidas. Foram obtidos os seguintes resultados gerais.

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.586e-01  1.186e+00   0.134   0.8940
cl           5.883e-05  3.599e-03   0.016   0.9870
dl           4.121e-03  2.218e-03   1.858   0.0681
b            9.307e-01  4.780e-02  19.471   <2e-16
r           -4.498e-02  3.930e-02  -1.145   0.2570
---
Residual standard error: 2.087 on 59 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9256,Adjusted R-squared: 0.9206
F-statistic: 183.6 on 4 and 59 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Discuta formalmente a qualidade do ajustamento do modelo.

(c) É admissível afirmar que, por cada centimetro adicional na distância ao solo dum cacho, o número de frutos vingados no cacho aumenta, em média, 0.005 unidades? Responda usando um intervalo a 95% de confiança.

(d) Deseja-se simplificar o modelo, sem perda significativa na qualidade do ajustamento ($\alpha = 0.10$).

i. Justifique brevemente qual o modelo de regressão linear com três preditores que escolheria.

ii. Para o modelo que acaba de escolher, calcule os valores da Soma de Quadrados Residual e do coeficiente de determinação R^2.

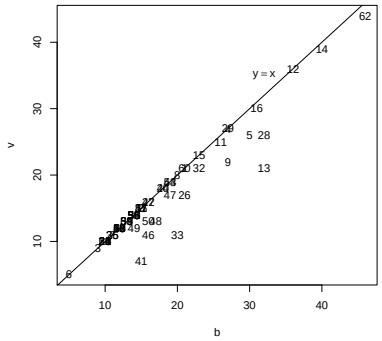
iii. Complete o algoritmo de exclusão sequencial para determinar o mais simples submodelo possível ($\alpha = 0.10$), sabendo que os coeficientes de determinação para todos os submodelos com dois preditores são os indicados na tabela seguinte. Justifique as suas afirmações.

Preditores	R^2	Preditores	R^2	Preditores	R^2
{`cl`,`dl`}	0.02236	{`cl`,`b`}	0.9135	{`cl`,`r`}	0.3485
{`dl`,`b`}	0.9229	{`dl`,`r`}	0.3666	{`b`,`r`}	0.9179

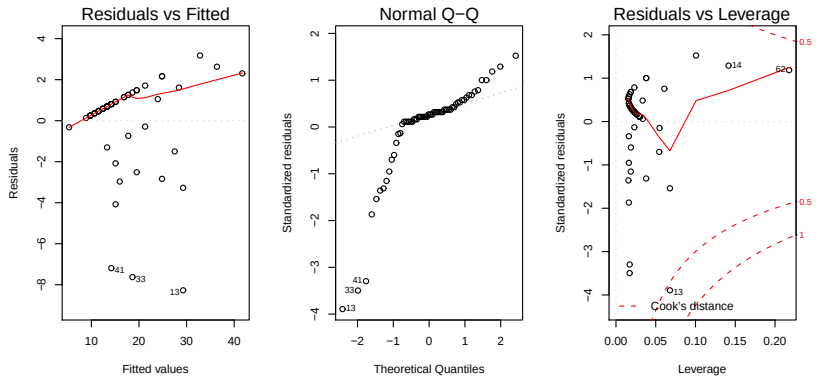
(e) Considere agora a regressão linear simples de `v` sobre `b`, isto é, do número de frutos vingados sobre número de botões, por cacho.

i. Diga, justificando, qual a equação da recta de regressão ajustada e qual o significado da estimativa do declive da recta, no contexto do problema em questão.

ii. Um investigador chama a atenção para a relação existente entre a variável resposta (`v`) e o preditor (`b`), relação reflectida no seguinte gráfico (**NOTA:** a recta indicada não é a recta de regressão, mas sim a bissectriz dos quadrantes ímpares).



Eis alguns gráficos relativos aos resíduos do ajustamento da regressão linear simples.



Comente os quatro gráficos. Que conclusões pode extrair, no que respeita à relação entre as duas variáveis, e quais as implicações para o modelo de regressão linear simples que acaba de ajustar?

7. Num estudo duma espécie de árvores pretende-se estabelecer relações entre a altura dos troncos das árvores, o respectivo diâmetro à altura do peito e o volume desses troncos. Foram efectuadas medições destas variáveis em $n = 31$ árvores, sendo os resultados designados pelos nomes *Altura* (medida em pés), *Diametro* (medido em polegadas) e *Volume* (medido em pés cúbicos). Eis os valores de algumas estatísticas descritivas elementares, bem como dos coeficientes de correlação entre as variáveis:

```
> apply(arvores,2,summary)
        Diametro Altura Volume
Min.        8.30     63  10.20
1st Qu.    11.05     72  19.40
Median     12.90     76  24.20
Mean       13.25     76  30.17
3rd Qu.    15.25     80  37.30
Max.       20.60     87  77.00
```

```
> apply(arvores,2,var)
  Diametro     Altura     Volume
  9.847914  40.600000 270.202796

> cor(arvores)
          Diametro    Altura    Volume
Diametro 1.0000000 0.5192801 0.9671194
Altura   0.5192801 1.0000000 0.5982497
Volume   0.9671194 0.5982497 1.0000000
```

(a) Foi inicialmente ajustado um modelo de regressão linear múltipla para prever os volumes dos troncos, a partir das suas alturas e diâmetro, tendo sido obtidos os seguintes resultados.

```
Call: lm(formula = Volume ~ Diametro + Altura, data=arvores)
[...]
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -57.9877     8.6382  -6.713 2.75e-07
Diametro      4.7082     0.2643  17.816  < 2e-16
Altura        0.3393     0.1302   2.607   0.0145
---
Residual standard error: 3.882 on 28 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.948,      Adjusted R-squared: 0.9442
F-statistic:   255 on 2 and 28 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

i. Efectue o teste de ajustamento global do modelo. Discuta o resultado.

ii. Diga se é possível simplificar este modelo, obtendo uma regressão linear simples que não seja significativamente pior do que este modelo. Utilize os níveis de significância $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$. Comente.

iii. Independentemente da sua resposta na alínea anterior indique, para cada um dos submodelos de regressão linear simples considerados, os Coeficientes de Determinação e o valor da estatística F no teste de ajustamento global.

(b) Tendo por base experiência anterior, foi sugerido que se poderia ainda melhorar o ajustamento procedendo a uma transformação logarítmica de todas as variáveis. O ajustamento resultante é indicado de seguida.

```
Call: lm(formula = log(Volume) ~ log(Diametro) + log(Altura) , data=arvores)
[...]
Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   -6.63162    0.79979  -8.292 5.06e-09 ***
log(Diametro)  1.98265    0.07501  26.432  < 2e-16 ***
log(Altura)    1.11712    0.20444   5.464 7.81e-06 ***
---
Residual standard error: 0.08139 on 28 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9777,     Adjusted R-squared: 0.9761
F-statistic: 613.2 on 2 and 28 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

i. Qual é a relação de base considerada por este modelo, em termos das variáveis originais (não logaritmizadas)?

ii. Discuta a seguinte afirmação: "o ajustamento dos dados logaritmizados é melhor, tendo em conta o maior Coeficiente de Determinação, o maior valor da estatística F e ainda os resíduos mais pequenos do que no caso dos dados não logaritmizados".

(c) Foi finalmente decidido experimentar um modelo (sem transformação das variáveis) em que as variáveis *Altura* e *Volume* trocam de papel em relação ao modelo inicial, ou seja, para saber se a altura dos troncos pode ser descrita, de forma adequada, a partir duma relação linear com o Diâmetro e o Volume. Foram obtidos os seguintes resultados com este modelo:

```
Call: lm(formula = Altura ~ Diametro + Volume, data=arvores)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  83.2958     9.0866   9.167 6.33e-10
Diametro     -1.8615     1.1567  -1.609   0.1188
Volume        0.5756     0.2208   2.607   0.0145
```

```
Residual standard error: 5.056 on 28 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.4123,     Adjusted R-squared: 0.3703
F-statistic:  9.82 on 2 and 28 DF,  p-value: 0.0005868
```

Discuta o resultado deste teste, tendo em conta o valor relativamente baixo do Coeficiente de Determinação associado ao ajustamento. Como se pode explicar o facto de esta nova relação entre as mesmas três variáveis utilizadas no modelo da alínea inicial produzir uma muito pior qualidade do ajustamento?

8. Para fins comerciais, é hábito estimar o peso de ameixas a partir dos seus diâmetros. A fim de se obter uma relação entre diâmetro e peso, válida para uma determinada variedade, foram calibrados (diametro em *mm*) e pesados (em *g*) $n = 41$ frutos, tendo-se obtido os valores indicados no ficheiro `ameixas.csv`, disponível na página *web* da disciplina.

   (a) Construa a nuvem de pontos de *diametro* (X) contra *peso* (Y). Comente a relação de fundo obtida. Ajuste uma regressão linear simples de `peso` sobre `diametro` e trace a recta de regressão ajustada sobre a nuvem de pontos.

   (b) Ajuste um polinómio de segundo grau à relação entre as duas variáveis: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Indique as estimativas dos parâmetros deste modelo. Trace a parábola ajustada por cima da nuvem de pontos obtida na alínea anterior.

   (c) Teste formalmente se o modelo parabólico da alínea anterior se ajusta de forma significativamente melhor que o modelo linear inicial. Comente.

   (d) Inspeccione os resíduos do modelo parabólico ajustado e comente.

   (e) Investigue se vale a pena considerar um polinómio de terceiro grau na relação entre diâmetro e peso dos frutos.