

- Se ainda não guardou o telemóvel **guarde-o agora** na mala/mochila fechada ou coloque-o na secretária do Professor. Não guarde o telemóvel no bolso.
- A prova será **anulada** se for manuseado equipamento eletrónico (incluindo calculadora ou telemóvel).
- Se utilizar folhas soltas reserve a 1ª página para **capa**.
- Escreva o nº de aluno e o nome **completo** na capa.
- **Justifique** todas as respostas.

1. (3.5 val.) Calcule

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

c)  $P(x \ln x)$

d)  $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

2. (2.5 val.) Seja  $f(x) = \arcsin x$  e  $P_1(x)$  o polinómio de MacLaurin de ordem 1 de  $f$ .

a) Determine  $P_1$ .

b) Utilizando a fórmula de MacLaurin comente a seguinte afirmação: “A reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto abcissa zero está abaixo do gráfico de  $f$  para todo o  $x \in ]-1, 1[$ ”.

c) Determine um valor aproximado de  $\arcsin 0.1$ . Este valor é superior ou inferior a  $\arcsin 0.1$ ?

3. (1.5 val.) Represente geometricamente e calcule a área da região do plano

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq \frac{\pi}{2}, y \geq x - \frac{\pi}{2}, y \geq \cos x \right\}$$

4. (2.5 val.) Considere a função  $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,  $x \geq 0$ , com  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t+1)^2}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{e^{1-t}}{4}, & t > 1 \end{cases}$ .

a) Calcule  $\varphi(1)$  e  $\varphi'(1)$ .

b) Determine uma expressão para  $\varphi(x)$  em que não figure o símbolo  $f$ .

c) Estude a natureza do integral impróprio  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .

**Soluções:**

1. a) 0    b)  $e$     c)  $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$     d)  $3 + 2 \ln 4$

2. a)  $P_1(x) = x$     c)  $P_1(0.1) = 0.1 < \arcsin 0.1$

3. Área de  $R$  é  $\frac{3}{8}\pi^2 - 1$

4. a)  $\varphi(1) = \frac{1}{2}$  e  $\varphi'(1) = \frac{1}{4}$

b)  $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3 - e^{1-x}}{4}, & x > 1 \end{cases}$

c) Convergente com valor  $\frac{3}{4}$