INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial/Transição de Álgebra Linear

7 de julho de 2023 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[10v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\alpha \\ 0 & -3 & 0 \\ \alpha & 0 & -2-\alpha \end{bmatrix} = [\, u_1 \; u_2 \; u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α para os quais:

i) A é invertível.

ii) -3 é valor próprio de A.

iii) $(1, 0, -1) \in \mathcal{N}(A)$.

c) Indique os valores de α e β para os quais b não é combinação linear de u_1, u_2, u_3.

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = 2$

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

e) Justifique que $\mathcal{C}(A) = \langle (2, 3, 2), (0, -3, 2) \rangle$.

f) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

g) Determine um subespaço próprio de A e interprete-o geometricamente.

h) Existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A?

[5v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = [\, u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \,]$, $v = (-2, 1, 2, 1)$ e $b = (1, 0, 4, -1)$.

a) Mostre que $v \perp \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

b) Determine uma base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$.

c) Determine o vetor de $\mathcal{C}(A)$ à menor distância de b e indique o valor dessa distância.

d) Indique um vetor $c \in \mathbb{R}^4$, $c \neq b$, tal que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e $d(c, \mathcal{C}(A)) = d(b, \mathcal{C}(A))$.

Continua no verso !

[3.5v] **3.** Uma família de agricultores cultiva milho, alface e feijão para venda. Os recursos que limitam a produção são a terra e a mão-de-obra, estando disponíveis 2 hectares de terra e 4500 horas de trabalho familiar. Um hectare de milho, um hectare de alface e um hectare de feijão requerem, respetivamente, 2000, 3000 e 1500 horas de trabalho. A produção por hectare de cada cultura e o lucro obtido com a venda encontram-se na tabela abaixo. A família comprometeu-se a produzir, pelo menos, 5000 kg milho e 100 kg de alface. Pretende-se determinar a área a destinar a cada cultura de forma a maximizar o lucro da venda dos produtos.

	Milho	Alface	Feijão
Produção	3600 kg/ha	200 kg/ha	3200 kg/ha
Lucro	0.2 €/kg	5 €/kg	0.25 €/kg

a) Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

b) Mostre que cultivar 1.5 ha de milho, 0.5 ha de alface e não cultivar feijão corresponde a uma solução admissível do problema.

c) Escreva o problema na forma *standard*.

d) Verifique se a solução da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível.

[1.5v] **4.** Seja A uma matriz invertível de ordem n e v um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ. Mostre que v é vetor próprio de A^{-1} e indique o correspondente valor próprio.