INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2º Teste de Álgebra Linear

26 de janeiro de 2022 - Duração: 1h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

[4.5v] **1.** Considere $V = \langle(2,1,1,-2),(1,0,1,-1),(1,-1,2,-1)\rangle$, $b=(2,-3,0,-2)$ e $c=(1,2,2,3)$.

a) Justifique que $c \in V^{\perp}$.

b) Determine uma base e a dimensão de $V^{\perp}$.

c) Indique o vetor de V a menor distância de b e o valor dessa distância.

d) Determine um vetor $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{proj}_{V^\perp}(u) = c$ e $d(u,V^{\perp}) = d(b,V^{\perp})$.

[3v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $\det(2(A-I)^{10})$.

b) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.

c) Um conjunto linearmente independente de vetores próprios de A contém no máximo quanto vetores?

[1v] **3.** Os resíduos produzidos por duas fábricas de uma mesma empresa, F_1 e F_2, contêm dois tipos de poluentes P_1 e P_2. Normas ambientais exigem que as quantidades de P_1 e P_2 sejam reduzidas em pelo menos 30 t e 40 t, respetivamente. Sabe-se que processar 1 tonelada de resíduos em F_1 reduz em 0.10 t a quantidade de P_1 e em 0.45 t a quantidade de P_2. Por outro lado, processar 1 tonelada de resíduos em F_2 reduz em 0.20 t a quantidade de P_1 e em 0.25 t a quantidade de P_2. A capacidade da fábrica F_2 permite processar até 100 t de resíduos. Os custos de processar uma tonelada de resíduos na fábrica F_1 e F_2 são respetivamente de 15 e 10 euros. Pretende-se determinar a quantidade de resíduos a processar em cada fábrica por forma a minimizar os custos de processamento.

Formule o problema em termos de programação linear, atribuindo significado às variáveis.

[1.5v] **4.** Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = x_1 + 2x_2 & + & 3x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 - x_2 & & \geq 0 \\ & x_2 & + & x_3 \leq 2 \\ & -x_1 & & +x_3 = 0 \\ & x_1, \quad x_2, & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

b) Verifique que a solução em que $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ corresponde a um vértice da região admissível.