INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial de Álgebra Linear

1 de fevereiro de 2023 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[7.25v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & \alpha \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix} = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 3-\beta \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β.

b) Determine os valores de α e β para os quais:

i) $b \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

ii) $(5, -4, 0)$ é solução de $Ax = b$.

c) Determine os valores de α para os quais:

i) $\mathcal{C}(A)^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

ii) 4 é valor próprio de A.

No que se segue, considere $\alpha = 1$.

d) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analítica e geometricamente.

e) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{N}(A)$.

[5v] **2.** Considere $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, com $u_1 = (1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1)$ e $u_3 = (2, 1, -1, 1)$ e $b = (-1, -1, 1, 1)$.

a) Determine uma base e a dimensão de U.

b) Mostre que $U = \{(x, y, z, t) : x - y + z = 0,\ 2x - y + 2z - t = 0\}$.

c) Calcule a $\text{proj}_U(b)$.

d) Determine um vetor $c \in \mathbb{R}^4$, tal que $\text{proj}_U(c) = u_2$ e $d(c, U) = d(b, U)$.

[3.75v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $\det(2A^{-1})$.

b) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

c) Indique um vetor próprio de A.

d) Existirá um conjunto linearmente independente formado por 3 vetores próprios de A?

Continua no verso !

[2.75v] **4.** Considere o problema de programação linear nas variáveis x, y e z,

$$\begin{array}{ll} \max & 3x + 2y + z \\ \text{s.a} & \begin{array}{rrrl} x + & y + & z & \geq 4 \\ x & & & \leq 3 \\ & & z & \leq 2 \\ x + 3\,y & & & \leq 6 \\ x, & y, & z & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

b) Averigue se $(1, 1, 2)$ é vértice da região admissível do problema.

c) Determine uma solução ótima do problema admitindo que a restrição linear $x + y + z \geq 4$ é substituída por $x + y + z = 4$.

[1.25v] **5.** Considere $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ e $V = \langle u, v, w \rangle$. Mostre que $\|b - (\alpha u + \beta v + \gamma w)\| \geq \|\text{proj}_{V^\perp}(b)\|$, para quaisquer $b \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.