INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

9 de fevereiro de 2022 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

[9.5v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 5 & 1 & \alpha^2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \; v_2 \; v_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\alpha\beta^2 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α para os quais:

i) $b \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$.

ii) 0 é valor próprio de A.

c) Nas seguintes subalíneas considere $\alpha = 2$.

i) Determine $\mathcal{C}(A)^\perp$ e descreva-o geometricamente.

ii) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.

d) Nas seguintes subalíneas considere $\alpha = 0$.

i) Calcule o ângulo formado pelos vetores v_2 e v_3.

ii) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas. A matriz A será diagonalizável?

iii) Indique um vetor próprio unitário de A.

[5v] **2.** Considere $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_1 - x_2 + x_3 = 0,\; x_1 - x_3 - 2x_4 = 0\}$,
$V = \langle (1, -1, 1, 0), (-2, 1, 0, 2) \rangle$ e $b = (2, 0, -2, -1)$.

a) Determine uma base e a dimensão de U.

b) Determine a $\text{proj}_V(b)$ e indique a distância de b a V.

c) Mostre que $U^\perp = V$.

d) Indique $c \in \langle b \rangle$ tal que $d(c, V) = 1$.

Continua no verso !

[1v] **3.** Uma empresa possui duas fábricas F_1 e F_2 que produzem dois tipos de produto, P e Q. Semanalmente, as fábricas $F1$ e F_2 têm capacidade para produzir até 500 e 600 kg de produto (independentemente do seu tipo) e dispõem de 7000 e 8000 m^2 de área para o armazenamento. Cada kg de produto P e Q, respetivamente, ocupa 12 e 15 m^2 de espaço de armazenamento e gera um lucro de 9 e 12 euros. A empresa comprometeu-se com clientes a fornecer semanalmente 500 kg de produto P e 400 kg de produto Q. A empresa pretende determinar a quantidade de cada um dos produtos a produzir semanalmente em cada uma das fábricas de forma a maximizar o lucro.

Formule o problema em termos programação linear atribuindo significado às variáveis.

[2.5v] **4.** Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max z = 2x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Converta a formulação anterior à forma *standard*.

b) Verifique se $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ corresponde a um vértice da região admissível.

c) Determine a solução ótima do problema quando $x_2 = 0$.

[2v] **5.** a) Defina susbespaço vetorial gerado por um conjunto de vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

b) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ tais que $\{u, v\}$ é linearmente independente e $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha u + \beta v = \gamma u + \delta v$. Prove que $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$.