Capítulo 1

Cálculo matricial e sistemas de equações lineares

EXERCÍCIOS 1.

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

   (a) $(1,-1,2)$

   (b) $(-1,0,\pi,0)$

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

3. Determine todos os vectores unitários que fazem ângulos de $\frac{\pi}{3}$ com cada um dos seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

   (b) $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$.

4. Indique um vector não nulo que seja ortogonal a ambos os vectores de cada um dos seguintes pares.

   (a) $(1,0,1)$ e $(1,1,-1)$.

   (b) $(1,-1,2)$ e $(2,1,-1)$.

5. Indique dois vectores não nulos ortogonais entre si e ortogonais ao vector de cada uma das alíneas seguintes.

   (a) $(1,1,1)$.

   (b) $(1,2,1,-3)$.

6. Sejam x e y vectores de $\mathbb{R}^n$. Prove e interprete geometricamente:

   (a) $\|x+y\|=\|x-y\|$ se e só se x e y são ortogonais.

   (b) Os vectores $x+y$ e $x-y$ são ortogonais se e só se $\|x\|=\|y\|$.

   (c) Se x e y são ortogonais então $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

   (d) Os vectores x e y são unitários e ortogonais então $\|x-y\|=\sqrt{2}$.

EXERCÍCIOS 2.

1. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   Calcule, sempre que possível, o valor das seguintes expressões.

   a) $(5A-A)-(B-2B)$ b) $(2A-B)^\top-C$ c) $(2(A^\top-C)^\top+B)^\top$
   d) $(B^\top-C)^\top+2B^\top$ e) $D+D^\top$ f) $D-D^\top$.

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIO 3. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } a=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível, AB, BA, $BA^\top$, CC, $AA^\top$, $a^\top a$, $a\,a^\top$ e B^3.

EXERCÍCIOS 4.

1. Sejam $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $Ab+Ib$, $(A+I)b$, $(A+A^\top)2b$ e $b^\top b$.

b) Resolva a equação matricial $Ax=3x+b$, com $x\in\mathbb{R}^3$.

2. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e o vetor genérico de $\mathbb{R}^2$ $v=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

   a) Calcule, em função de x e y, o vetor Av e represente geometricamente v e Av.

   b) Qual é a relação entre entre os vetores v e Av?

EXERCÍCIOS 5.

1. Para que valores de b o sistema

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 &= 4 \\ 4x_1+6x_2 &= b \end{cases}$$

   é impossível?

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-\ x_3 &= 4 \\ x_1-x_2+3x_3 &= 2 \end{cases}$$

   de forma a obter um sistema impossível.

3. Classifique e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

   a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

   b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

   c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

EXERCÍCIOS 6. Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

1. $\begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ x+y+z = 10 \\ x+2z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 = 6 \\ 2x_1+5x_2+x_3 = 9 \\ x_1+4x_2-6x_3 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 4 \\ 2x_1+4x_2-x_3+2x_4 = 11 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5 = 2 \\ x_3+x_4+x_5 = -1 \\ -x_1-2x_2-x_3+2x_4+x_5 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 1 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4 = 9 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4 = -6 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4 = 7 \end{cases}.$

EXERCÍCIOS 7.

1. Discuta, para todos os valores dos parâmetros, cada um dos seguintes sistemas.

   a) $\begin{cases} x-z = 1 \\ y+az = 0 \\ -x+y+2az = 1 \end{cases}, \; a \in \mathbb{R}$

   b) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3 = 1 \\ 2x_2+2x_3 = \gamma \\ x_1+\gamma x_2+\gamma x_3 = 1 \end{cases}, \; \gamma \in \mathbb{R}.$

   c) $\begin{cases} ax+2z = 2 \\ x+2y = 1 \\ x-2y+bz = 3 \end{cases}, \; a, b \in \mathbb{R}$

   d) $\begin{cases} 2x+4y+bz = 2 \\ x+(d+2)y = 1 \\ x+2y+bz = 1 \\ x+2y = c \end{cases}, \; b, c, d \in \mathbb{R}.$

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $m - n$ variáveis livres.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

   e) Se S é possível e $m = n$, então S é determinado.

EXERCÍCIOS 8.

1. Considere os sistemas de equações lineares cujas correspondentes matrizes ampliadas são

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

   a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

   b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

   c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que façam o sistema

      c1) impossível,

      c2) indeterminado.

2. É correto afirmar que um sistema de equações lineares do tipo $n \times n$ é possível e determinado se e só se a matriz reduzida que se obtem quando se aplica o método de Gauss à matriz dos coeficientes é a matriz identidade? Justifique.

3. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

   a) Quantos *pivots* podem existir em E?

   b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

EXERCÍCIOS 9.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema homogéneo $(A-\lambda I)x = \vec{0}$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Indique a característica de $A-\lambda I$ em função de λ. Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

   b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av = \lambda v$.

   c) Resolva o sistema considerando $\lambda = -1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções e a relação estabelecida na alínea b).

EXERCÍCIO 10. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 11. Prove os resultados da Proposição 11 do Texto de Apoio.

EXERCÍCIOS 12.

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

   a) É correto afirmar que $A+B$ é invertível?

   b) Será que a matriz A^3BC^{-1} é invertível?

   c) Mostre que $A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$.

   d) Prove que se $AB = AC$, então $B = C$.

4. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e $b, c \in \mathbb{R}^3$.

   a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.

   b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.

   c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   respetivamente. Determine, em termos dos vetores u, v e w, a matriz inversa de A.

5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que as proposições seguintes são equivalentes.

   a) A é invertível.

   b) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

   c) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.

6. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3+\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e a β.

   b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

   c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

7. Seja $Ax = b$ um sistema que admite as soluções não nulas u e v. Em que condições o vetor $u + v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 13.

1. Sejam u, v vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que u é unitário, v tem norma 2 e o cosseno do ângulo por eles formado tem valor $\frac{1}{4}$. Mostre que $3u - v$ e $u + v$ são ortogonais.

2. Calcule $A^2 + 3bb^\top$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Indique o conjunto de soluções dos sistemas lineares

   (a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

4. Determine todos os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução de $Ax = b$ com
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

(f) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Discuta o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1+3a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + cz = 3 \\ bx + cy + -3z = -5 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

admita a solução $(2, -1, 2)$.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine e interprete geometricamente o conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.

Determine os valores de α para os quais $(-1, 0, 2, 1)$ é solução do sistema $Ax = 0$.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^4$ para os quais $Ax = b$ é possível.

b) Qual é a característica de A?

c) Dê exemplo de um vetor c para o qual o sistema $Ax = c$ seja impossível.

11. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Indique os valores de α, β para os quais A é invertível.

   (c) Considere $\alpha = 0$ e inverta a matriz A.

12. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.

   (a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?

   (b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

13. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas invertíveis de ordem n. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações matriciais (em ordem a X):

   (a) $(C + X)A = D$.

   (b) $B(CA + 3X) = DX$.

   (c) $ABX = I$.

   (d) $3X + AX = I$.

   (e) $(AB)^{-1}BAX = I$.

   (f) $(X - A)^2 = B + (X - A)X$.

   (g) $ABX(AB)^{-1} = I$.

   (h) $BX + XA = I$.

14. Sejam A, B, C e X matrizes que satisfazem a equação matricial

$$\left[(AX)^T + BC\right]^{-1} = I,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [\,2 \;\; 3\,]$.

   (a) Qual o tipo da matriz X?

   (b) Determine X.

15. Determine matrizes X e Y tais que $3X - 2Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $-X + Y = 2I$.

16. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule $(A-5I)B$.

    (b) Determine a inversa a matriz A e utilize-a para resolver o sistema $Ax = b$.

17. Considere uma matriz A tal que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, em que $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule P^{-1}.

    (b) Determine A.

    (c) Calcule A^{10}.

18. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3 = 0$.
    Mostre que $(I-A)^{-1} I = I + A + A^2$.

19. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é invertível.

20. Escreva uma equação vetorial equivalente a

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Capítulo 2

Espaços vetoriais

EXERCÍCIOS 14.

1. Determine os espaços nulo e das colunas das seguintes matrizes.

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Verifique se o vetor $(-3,12,12)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (-1,3,1)$, $v_2 = (0,2,4)$, $v_3 = (1,0,2)$.

3. Verifique se o vetor $(3,1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

4. Verifique se o vetor $(0,1,4)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V.

   a) $u = (3,-5)$, $V = \{(1,2),(-2,6)\}$;

   b) $u = (1,1,1)$, $V = \{(1,0,1),(0,3,5)\}$;

   c) $u = (2,-2,\frac{1}{6},\frac{1}{6})$, $V = \{(1,-1,0,0),(2,0,1,1),(0,3,1,1)\}$;

d) $u = (0,1,0,1,0)$, $\quad V = \{(1,2,2,1,1), (\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3})\}$.

EXERCÍCIO 15. Decida sobre a independência linear de $U = \{(1,2,-1),(0,2,1),(2,-1,3)\}$ e $U' = \{(1,2,-1),(0,2,1),(2,-1,3),(4,5,-2)\}$.

EXERCÍCIOS 16.

1. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes?

   a) $\{(3,1),(4,-2)\}$
   b) $\{(3,1),(4,-2),(7,2)\}$
   c) $\{(-1,2,0,2),(5,0,1,1),(8,-6,1,-5)\}$
   d) $\{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$.

2. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1,0,3,1),(-1,1,0,1),(2,3,0,0),(1,1,6,3)\}$ é linearmente dependente.
   Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?

3. Discuta em função dos parâmetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1,-2),(\alpha,-1)\}$
   b) $\{(\alpha,1,1),(1,\alpha,1),(1,1,\alpha)\}$
   c) $\{0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\}$.

4. Sabendo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independente, decida sobre a independência linear do conjunto $\{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$.

EXERCÍCIOS 17. Indique uma base para cada um dos seguintes conjuntos.

1. $\mathbb{R}^3$.

2. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$.

3. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0$.

EXERCÍCIOS 18.

1. Determine uma base para o espaço nulo e para o espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,1,1)$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

   Verifique que $v = (0,3,3,-1) \in \mathcal{N}(A)$ e indique uma base de $\mathcal{N}(A)$ que inclua v.

EXERCÍCIO 19.

1. Calcule $\dim S$, com $S =< \{(1,0,1),(1,-1,0),(3,-1,2)\} >$ e $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-2y+z-t=0\}$.

2. Para que valores de α a dimensão do subspaço $S =< \{(1,\alpha,-1),(-1,1,1),(\alpha,0,-1)\} >$ é 3?

EXERCÍCIOS 20.

1. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$
   b) $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0),(5,6,2,0)\}$

2. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4\}.$$

   a) Mostre que V é subespaço vetorial.
   b) Indique uma base de V.

3. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:

   a) $V = \{(1,-1),(3,0)\}$
   b) $U = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$
   c) $W = \{(1,1),(0,8)\}$.

4. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) $V = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,2)\}$
   b) $U = \{(1,0,1),(2,4,8)\}$
   c) $W = \{(3,0,1),(1,1,1),(4,1,2)\}$.

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha,6,-1)$, $v_2 = (1,\alpha,-1)$ e $v_3 = (2,\alpha,-3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1,1,2)$ em relação à base correspondente.

6. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, $\mathscr{N}(\mathscr{A})$ e $\mathscr{N}(\mathscr{A}^{\mathscr{T}})$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2

7. Responda às alíneas seguintes utilizando a informação, respeitante a uma matriz A do tipo $m \times n$, fornecida na tabela seguinte.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2
car($A\|b$)	3	3	1	2	3	0	2

a) Classifique os sistemas lineares $Ax = b$.

b) Indique o número de variáveis livres dos sistemas $Ax = 0$.

c) Qual é a dimensão de $\mathscr{N}(\mathscr{A})$?

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

9. Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1),(-3,0,-2)\}.$$

a) Mostre que $V = \mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.

c) Escreva o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

10. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão do espaço nulo da matriz A.

b) Mostre que o espaço nulo de A é gerado pelos vetores $(1,2,0,-1)$ e $(-1,3,1,-1)$.

c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A, entao $v + u$ é também solução do sistema.

11. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.

a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique uma base de S.

c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S.

d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A, então y também pertence ao espaço nulo de B.

12. Considere o sistema $Ax = b$ em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o conjunto das soluções do sistema $Ax = b$.

b) Utilizando a resposta da alínea anterior, indique o espaço nulo de A. Interprete geometricamente o resultado obtido.

13. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base $\mathcal{N}(\mathcal{A})$.

b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.

c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$.

d) Interprete geometricamente os resultados obtidos nas alíneas anteriores e conclua que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 21.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

   (a) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.

   (b) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.

   (c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathscr{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathscr{C}(A)$ indicada em b).

   (d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathscr{C}(A)$.

   (e) Indique $\dim \mathscr{N}(A)$.

   (f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathscr{C}(A)$? Justifique.

   (g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $\mathscr{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.

   (b) Indique uma base para $\mathscr{C}(A)$.

   (c) Indique car(A).

   (d) Mostre que $\mathscr{N}(A) = \langle (-1,1,0),(1,0,1) \rangle$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \,]$.

   (a) Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(\alpha, \alpha^2, 2)$ é combinação de linear de u_1, u_2 e u_3?

   (b) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3.

4. Considere $V = \langle (1,1,0),(-1,1,1),(1,3,1) \rangle$.

   (a) Indique $\dim V$.

   (b) Mostre que $(2,4,1) \in V$.

   (c) Indique uma matriz A tal que $\mathscr{C}(A) = V$.

5. Considere os vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (0,3,1)$.

   (a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v\rangle = \langle w, z\rangle$.

   (b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathscr{C}(A) = \langle u, v\rangle$.

   (c) Determine $\mathscr{N}(A)$.

6. Sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,-1,0)$ e $v_4 = (1,1,0)$.

   (a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?

   (b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \mathbb{R}^3$?

   (c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 = x_3\}$

   (a) Descreva $\mathscr{N}(A)$ analitica e geometricamente.

   (b) Indique uma base e a dimensão de V.

   (c) Mostre que $\mathscr{C}(A) = V$.

Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

EXERCÍCIO 22. Mostre que o vetor $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 23.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Verifique que o vetor $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Qual é o complemento ortogonal de $\mathscr{C}(A)$?

3. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados por $\{(1,2,2,1), (1,0,2,0)\}$ e por $\{(1,1,2,-1)\}$.

4. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal para cada um dos seguintes subespaços.

   a) $<\{(1,1)\}>$ b) $<\{(1,1,3),(1,1,2)\}>$ c) $<\{(1,1,0,0),(0,2,4,5)\}>$
   d) $<\{(2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1)\}>$.

5. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua vetores do subespaço gerado por $\{(1,1,3),(1,1,2)\}$ e do seu complemento ortogonal.

6. Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *ortogonal* se as colunas são unitárias e quaisquer duas colunas distintas são ortogonais. Prove os seguintes resultados.

   a) A matriz A é ortogonal sse $A^{-1} = A^\top$.
   b) Se a matriz A é ortogonal, então é simétrica sse $A^2 = I$.

EXERCÍCIO 24. Determine a projeção do vetor $(4,-1,1)$ sobre $V =<\{(1,0,1),(1,1,0)\}>$.

EXERCÍCIOS 25.

1. Determine a projeção do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.

2. Determine a projeção do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$.

3. Identifique o vetor do subespaço vetorial $<\{(1,0,1),(1,1,0)\}>$ a menor distância do vetor $(1,2,3)$.

4. Considere o vetor $b = (1,1,1)$ e os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.
$$V =<\{(1,0,1),(0,1,1)\}> \quad \text{e} \quad U = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}.$$
   a) Determine a projeção ortogonal de b sobre o vetor (1,0,1).
   b) Determine as projeções ortogonais de b sobre V, U, $V^\perp$ e $U^\perp$.
   c) Calcule as distâncias de b a V e a U.

5. Determine a projeção do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.

6. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$
$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}$$
e o vetor $v = (2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U.

7. Defina a matriz de projeção sobre o plano de equação $x+2y+3z=0$.

8. Considere o vetor $w = (1,-2,2,2)$ e o subespaço $V =<\{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\}>$.

a) Defina a matriz de projeção sobre o subespaço V.

b) Determine a projeção de w sobre V.

9. Verifique que $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y,\ z = t\}$.

10. Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$, com característica n e $P = A(A^\top A)^{-1} A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.

a) $P^\top = P$.

b) $P^2 = P$.

11. Considere os vetores $u = (1, -1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$ e $b = (2, -1, 0, 1)$.

a) Calcule o ângulo definido pelos vetores u e v.

b) Determine a projeção ortogonal do vetor b sobre o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores u e v.

12. Considere os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.

a) Mostre que o conjunto $\{a, b, c\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

b) Escreva o vetor $(0, 2, 4)$ como combinação linear dos vetores a, b e c. Interprete geometricamente os coeficientes da combinação linear.

13. a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.

b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

14. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

a) Utilizando o processo de ortogona1ização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V.

b) Seja $b = (2, 1, 0, 1)$. Calcule a projeção de b sobre o subespaço V.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 26.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.

   (b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.

   (c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?

   (d) Calcule a projeção de b sobre $\mathscr{C}(A)$.

2. Considere $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

   (a) Indique uma base e a dimensão de V.

   (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V.

   (c) Calcule a matriz de projeção sobre V.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que $b \notin \mathscr{C}(A)$.

   (b) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas, as seguintes afirmações:

      i. $\dim \mathscr{C}^{\perp}(A) = 1$.

      ii. $\mathscr{N}^{\perp}(A) = \mathbb{R}^2$.

      iii. O vector de $\mathscr{C}(A)$ à menor distância de b é o vetor $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. Considere $W = \langle (1,1,1,-1), (0,1,2,-1) \rangle$ e $b = (4,-1,0,3)$.

   (a) Determine uma base e a dimensão de $W^{\perp}$.

   (b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W.

   (c) Calcule $\text{proj}_{W^{\perp}}(b)$.

   (d) Calcule as distâncias de b a W e $W^{\perp}$.

5. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathscr{N}(A)$.

   (a) Qual a característica de A?

   (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.

   (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathscr{N}(A)$.

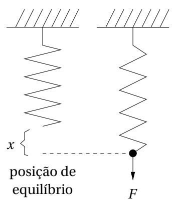
   (d) Calcule a distância de $b = (0,2,1,0)$ a $\mathscr{N}(A)$.

6. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais
   (a) $\langle(1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1)\rangle$
   (b) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$
   (c) $\{(x,y,z) : x+y=0,\ y+z=0\}$
   (d) $\{(x,y,z,w) : x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$

7. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais
   (a) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$
   (b) $\{(x,y,z,w) : x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$

8. Considere $v_1=(1,0,1,0)$, $v_2=(1,1,1,1)$, $v_3=(1,-1,1,-1)$, $A=[\,v_1\ \ v_2\ \ v_3\,]$ e $b=(1,2,3,4)$. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax=b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax=b$ no sentido usual ?

9. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F=k\,x$ em que k é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).

   Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

   Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

   $$E^2=(F_1-k\,x_1)^2+\cdots+(F_6-k\,x_6)^2.$$

   Interprete geometricamente o resultado obtido.

Capítulo 4

Determinantes

EXERCÍCIOS 27. Prove os seguintes resultados.

1. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.
2. Uma matriz com uma linha ou uma coluna de zeros tem determinante igual a zero.
3. É nulo o determinante de uma matriz com linhas proporcionais.

EXERCÍCIOS 28.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes indicando se é invertível.

a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Capítulo 5

Valores e vetores próprios

EXERCÍCIOS 29.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   a) Verifique que $(1,5,10)$ é vetor próprio.

   b) Verifique que 1 é valor próprio.

2. Verifique que -1 é valor próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e determine os vetores próprios associados a -1.

3. Determine os valores próprios e correspondentes vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes, indicando em cada caso, uma base e a dimensão do subespaço próprio associado a cada valor próprio.

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

   $$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero.

b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vetores próprios.

c) Discuta, em função do parâmetro a, a invertibilidade da matriz A.

5. Seja v um vetor próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A.

a) Mostre que, para todo o real α, v é um vetor próprio da matriz $A-\alpha I$ e indique o valor próprio associado.

b) Mostre que, para todo o inteiro n, v é vetor próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado.

EXERCÍCIOS 30.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

b) Indique um vetor próprio de A.

d) Será que existe uma matriz quadrada P, de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

2. Indique, justificando, quais das seguintes matrizes são diagonalizáveis.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   a) verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - \frac{1}{4})$.

   b) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

   a) Indique uma matriz de diagonalização.

   b) Prove que $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

6. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.

   b) Se $b = 2$, para que valores de a é A ortogonalmente diagonalizável?

   c) Se $b = 2$, existirá algum $a > 0$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e A sejam semelhantes? Justifique.

7. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1, com de multiplicidade algébrica 2 e $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$ vetores próprios associados a 1.

   a) Justifique que A é diagonalizável.

   b) Determine $E(1)$.

   c) Sabendo que $(-1,1,0)$ é um vetor próprio de A associado a 2, determine a matriz A.

8. Indique uma matriz ortogonal de diagonalização da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

9. Prove os seguintes resultados.

   a) Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.

   b) Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ, então λ tem o sinal de $v^T A v$.

Capítulo 6

Introdução à programação linear

EXERCÍCIO 31. Considere o problema de problema de programação linear,

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a} & \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & \leq & 24 \\ x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & \leq & 8 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}
\end{array}
$$

a) Represente geometricamente a região admissível.

b) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

c) Indique o maior intervalo de variação do membro direito da terceira restrição que mantém óptima a solução que referiu na alínea b).

d) Dê exemplo de uma outra função objectivo relativamente para a qual se mantenha óptima a solução que indicou na alínea b).

EXERCÍCIOS 32.

1. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque com 100 ha para zona florestal, reserva de caça e parque de campismo. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 Euros e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e a horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (Euros)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 80 e 60 Euros por cada hectare de terreno destinado a área florestal, reserva de caça e parque de campismo, respectivamente. Pretende determinar-se o número de hectares a destinar a cada tipo de ocupação de solo de forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e indique uma solução básica admissível.

c) Determine uma solução que maximize o lucro quando 40 ha de terreno são destinados a reserva de caça.

2. Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quénia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quénia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (Euros/Kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende-se determinar a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta. Formule o problema em termos de programação linear.

3. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para esse efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores indicados na tabela seguinte (em milhares de quilos).

	Aumentar 1 m a altura da chaminé	Aumentar 1 m^2 a área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m^2 a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil €. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

b) Represente graficamente a região admissível.

c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

4. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 Euros. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 €. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3. Pretende-se determinar a quantidade a transportar de cada um dos tipos de produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

   a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis intervenientes.

   b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

5. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de material dos tipos A, B, C e D requer, para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2, sendo cobrados 200, 300, 400 e 700 €, respectivamente.

   a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

   b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

   c) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, é admissível mas que não corresponde a um vértice da região admissível.

6. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30

t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível.

7. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2, dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12 € e 8 € e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

a) Formule o problema de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

b) Represente graficamente a região admissível.

c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

8. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{com} & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathscr{P} \end{array}$$

$$\text{em que} \quad \mathscr{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): \begin{array}{rcl} x_2 - 2x_3 + x_4 & \geq & 3 \\ x_1 \quad - 2x_3 + x_4 & \geq & 2 \\ x_1 \quad + x_3 \quad & \leq & 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0\}. \end{array}$$

a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

b) Verifique que $v = (2,3,0,0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ e indique o valor da função objectivo em v.

9. Considere o problema

$$\begin{array}{rrcr} \text{maximizar} & 20x_1 + 30x_2 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ & x_1 \quad & \leq & 60 \\ & x_2 & \leq & 50 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Represente graficamente a região admissível e as soluções admissíveis a que correspondem valores da função objectivo iguais a 600.

b) Indique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

c) Se os coeficientes da função objectivo coincidissem e fossem positivos, quais seriam as soluções óptimas?