Notas prévias e convenções utilizadas

- Os slides de apoio às aulas teóricas baseiam-se em grande parte na sebenta Texto de Apoio de Álgebra Linear
- A matéria exposta nestes slides deve ser complementada com a leitura dessa sebenta
- Vamos escrever a vermelho as definições, a azul o texto a destacar e amagenta os exercícios e desafios para os alunos

O conjunto $\mathbb{R}^n$

- Recordemos que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.
- O conjunto dos vetores do plano é o conjunto dos vetores com 2 componentes reais que se denota por $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

  Por exemplo, $(1, -\pi) \in \mathbb{R}^2$
- Analogamente, o conjunto dos vetores do espaço é o conjunto dos vetores com 3 componentes reais, denotado $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

  Por exemplo, $(1, -\pi, 0) \in \mathbb{R}^3$
- Vamos trabalhar com vetores com um número arbitrário de componentes reais: dado um inteiro $n \geq 2$, denotamos o conjunto dos vetores com n componentes reais por $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\Big\}$$

  x_i: componente do vetor x que se encontra na posição i
  Por exemplo, se $x = (1, -\pi, 0, 2, 3, -4) \in \mathbb{R}^6$, $x_4 = 2$

Cálculo matricial

Os números reais serão também designados por *escalares* por oposição a vetores

Definição de matriz

Sejam m, n inteiros positivos. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ *a uma coleção $A = [a_{ij}]$ de mn números reais dispostos em m linhas e n colunas,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

a_{ij}: *elemento da matriz que se encontra na linha i e coluna j da matriz*

O índice i percorre as linhas da matriz e designa-se por índice de linha *O índice j percorre as colunas da matriz e designa-se por* índice de coluna

As matrizes constituem uma extensão dos vetores adequada ao estudo dos sistemas lineares

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$

  O elemento de A que se encontra na linha 4 e coluna 1 é $a_{41} = 5$
- $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ definida por $a_{1j} = 10$ e $a_{2j} = \pi$, para todo o j, é

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ \pi & \pi & \pi \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ definida por $a_{ij} = i + j$, para $i, j = 1, 2, 3$, é

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz-linha e matriz-coluna ou vetor

- Se $m = 1$, $A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-linha*
  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matriz-linha do tipo 1×3
- Se $n = 1$, $A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-coluna* ou *vetor*
  Por exemplo, $(2, 3, -1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$
  - Em geral, $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser representado como m-uplo de números reais ou como matriz-coluna do tipo $m \times 1$:

$$x = (x_1, \cdots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Matriz definida por vetores e matriz quadrada

- Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]$ denota a matriz do tipo $m \times n$ cujas colunas são os n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$
  Por exemplo, se $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 10, 0)$,

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- Se uma matriz A é do tipo $n \times n$, A diz-se *quadrada de ordem n*
  Por exemplo, a matriz $[v_1\ \ v_2\ \ v_3]$ anterior é quadrada de ordem 3
  - Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ ao conjunto dos elementos a_{ii}, $i = 1, \dots n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular e matriz diagonal

$A = [a_{ij}]$ matriz quadrada de ordem n

- A diz-se *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, ou seja, se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é triangular superior de ordem 3
- A definição de *triangular inferior* é análoga e fica como exercício
- A diz-se *diagonal* se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, isto é, se todos os elementos fora da diagonal principal de A forem nulos, e pode ser representada por $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

  Por exemplo, $\mathrm{diag}(2, -1, 3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 3

Matriz escalar e matriz identidade

- Uma matriz diagonal A de ordem n diz-se *escalar* se todas as entradas da diagonal principal forem iguais entre si, isto é, se para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- Se $\lambda = 1$, A designa-se por *matriz identidade de ordem n* e denota-se por I_n (ou simplesmente por I). A matriz identidade representa o elemento neutro da multiplicaçãoo de matrizes

  Por exemplo, a matriz identidade de ordem 3 é a matriz

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualdade entre matrizes e matriz transposta

- $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo dizem-se *iguais* se os elementos homólogos forem iguais, isto é, se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 5 & x \\ y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 3 \\ 2 & w \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ w = 6 \end{cases}$

- A *transposta* de $A = \left[a_{ij}\right]$ do tipo $m \times n$ é a matriz $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$ do tipo $n \times m$, cujas colunas são as linhas de A pela mesma ordem

  Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

  Tem-se, obviamente, $(A^T)^T = A$

- $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se *simétrica*, se $A^T = A$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$

  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ é simétrica

Operações algébricas sobre vetores do plano

Recordemos as operações algébricas bem conhecidas sobre vetores do plano ($\mathbb{R}^2$). Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Adição de vetores:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

- Produto de um vetor por um escalar:

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

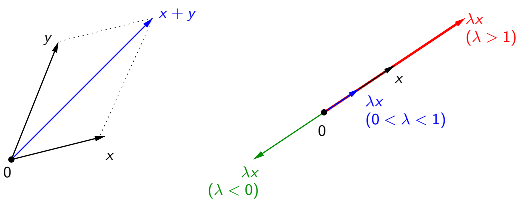
- Produto escalar (ou interno) de vetores:

$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Por exemplo, se $x = (3, 1)$, $y = (2, 5)$ e $\lambda = 2$, obtém-se

$$x + y = (5, 6), \quad 2(3, 2) = (6, 4), \quad (3, 1) \cdot (2, 5) = 11.$$

Interpretação geométrica das operações algébricas. . .



(a) (b)

Recordemos que o produto escalar está relacionado com o cosseno do ângulo θ formado pelo 2 vetores pela relação bem conhecida

$$x \cdot y = \cos(\theta)\, \|x\|\, \|y\|$$

onde $\|x\|$ e $\|y\|$ representam os comprimentos do vetores x e y.

A extensão das operações algébricas anteriores para vetores com um número arbitrário de componentes faz-se de modo óbvio.

Operações algébricas sobre vetores de $\mathbb{R}^n$

Definição

- *Adição de vetores:*

  $$x+y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$

  isto é, somam-se as componentes homólogas dos vetores
- *Produto de um vetor por um escalar:*

  $$\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, \lambda x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

  isto é, multiplicam-se todas as componentes do vetor pelo escalar
- *Produto escalar (ou interno) de vetores:*

  $$x \cdot y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdots (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Dar exemplos em $\mathbb{R}^4$ para as 3 operações anteriores

Propriedades das operaçẽs algébricas

Adição de vetores e o produto de vetores por escalares verificam várias propriedades que decorrem imediatamente das propriedades dos números reais (falaremos mais adiante nas propriedades do produto escalar).

Propriedades das operações algébricas

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos...)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

Operações algébricas sobre matrizes: adição de matrizes

As operações algébricas sobre matrizes estendem as operações da adição de vetores, do produto de um vetor por um escalar e do produto escalar de vetores

Se $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ são matrizes do mesmo tipo define-se a *soma de A com B*, por

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$$

Por outras palavras, os elementos de $A + B$ obtêm-se somando os elementos homólogos de A e de B

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -1+2 & 0+1 \\ 4-3 & 5+1 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Produto de uma matriz por um escalar

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ define-se o *produto de A pelo escalar λ*, por

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

Por outras palavras, λA obtém-se multiplicando cada elemento de A por λ

Se $\lambda = -1$, λA denota-se simplesmente por $-A$

Por exemplo, se $\lambda = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix}$, então

$$\lambda A = 3\begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 20 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 13 \\ 3\cdot 18 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -3 & 39 \\ 54 & -6 & 243 \end{bmatrix}$$

Propriedades das adição e do produto por escalar

Sejam A, B e C matrizes do tipo $m \times n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + [0]_{m\times n} = A$ ($[0]_{m\times n}$ matriz cujos elementos são todos nulos)
4. $A + (-A) = [0]_{m\times n}$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8. $1.A = A$
9. $(A + B)^T = A^T + B^T$
10. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
11. $(A^T)^T = A$

Propriedades das operações algébricas

A matriz nula $[0]_{m\times n}$ é portanto o elemento neutro da adição de matrizes

As propriedades (1)-(8) decorrem das propriedades da adição e do produto de números reais e são análogas às propriedades da adição e do produto por escalar para vetores

As restantes três propriedades são evidentes

Exercício na aula

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e I_2 a matriz identidade de ordem 2. Simplifique expressão $((A^T - 2B) + 4I_2)^T$ indicando as propriedades que utilizar e calcule o seu valor

Produto de matrizes

- Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas* se

$$\text{número de colunas de } A = \text{número de linhas de } B$$

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ são encadeadas pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Mas B e A não são encadeadas !

Definição do produto de matrizes

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ são encadeadas, define-se o *produto* de A por B, denotado AB, como sendo a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ik} &= (\text{linha } i \text{ de } A)\cdot(\text{coluna } k \text{ de } B) \\ &= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})\cdot(b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \end{aligned}$$

Produto de matrizes

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ são encadeadas, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ \hline 4 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 8 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} 2+8+0 & -2+16-5 \\ 4+10+0 & -4+20+0 \\ 1+16+0 & -1+32+25 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 14 & 16 \\ 17 & 56 \end{bmatrix}_{3\times 2}
\end{aligned}
$$

Por exemplo, o elemento de AB que se encontra na linha 3 e coluna 1 é o produto escalar da terceira linha de A pela primeira coluna de B, isto é, $(1, 8, 5) \cdot (1, 2, 0) = 17$

Produto escalar via produto de matrizes...

- O produto de matrizes estende o conceito de produto escalar de vetores: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então

$$\boxed{x^T y = x \cdot y}$$

Por exemplo, se $x = (-1, 1, 3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $y = (1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$x^T y = [-1 \;\; 1 \;\; 3]_{1\times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (-1, 1, 3) \cdot (1, 0, 1) = 2 = x \cdot y$$

- Note-se que $xy^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} [1 \;\; 0 \;\; 1]_{1\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$