Potência de uma matriz quadrada

Potência inteira não negativa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n definem-se as *potências inteiras não negativas de* A por,

$$A^0 = I_n \qquad \text{e} \qquad A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k vezes}} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

TPC: calcular A^3 com $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

Propriedades

Propriedades do produto de matrizes

Sejam A, B, C matrizes, I a matriz identidade de ordem conveniente, $[0]$ a matriz nula de tipo conveniente e $\lambda \in \mathbb{R}$ e k um inteiro não negativo. Sempre que as operações estejam definidas, tem-se:

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva)
3. $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva)
4. $AI = IA = A$ (el. neutro da mult.)
5. $A[0] = [0]A = 0$ (el. absorvente da mult.)
6. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (compatibilidade dos produtos)
7. $(AB)^T = B^T A^T$ (!)
8. $(A^k)^T = (A^T)^k$

“Não propriedades” do produto de matrizes

Ao contrário do que sucede com a adição, algumas propriedades do produto de números reais não se generalizam para o produto de matrizes

Exercício na aula - corrigido !

Calcular os produtos AB e BA com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

O que observa ? Qual é o resultado de $(AB)^2$?

“Não propriedades” do produto de matrizes

- O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, em geral,

$$AB \neq BA$$

- A A lei do anulamento do produto também não é válida, ou seja, em geral,

$$AB = 0 \quad \not\Rightarrow \quad (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$

- A lei do corte também não é válida, ou seja, em geral, dadas A, B e C, com $A \neq 0$,

$$AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C$$

TPC

Dar exemplos de 3 matrizes quadradas de ordem 2, A, B e C, para as quais a lei do corte falhe

Uma consequência inesperada...

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n não permutáveis, isto é, $AB \neq BA$, obtém-se aplicando as propriedades distributivas do produto de matrizes,

- $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$.
- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
- $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

A não comutatividade do produto de matrizes teve como consequência que não são válidos para o produto de matrizes quadradas os análogos dos casos notáveis da multiplicação de números reais

Atenção

Deve-se ter uma particular atenção ao simplificar expressões que envolvam produtos de matrizes!

Exercícios na aula e TPC

- Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Simplifique e calcule o valor de $((BC)^2A)^T$.

- Grupos de exercícios 2, 3 e 4.1a) das páginas 2 e 3 da sebenta de exercícios.

- Mostre que se A é uma matriz quadrada de ordem n então as matrizes $A + A^T$ e AA^T são simétricas

Sistema de equações lineares

Sistema linear

Um sistema linear a m equações lineares e n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é um sistema de equações forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: *coeficiente da variável* x_j *na i-ésima equação*
- $b_i \in \mathbb{R}$: *termo constante* ou *membro direito* da i-ésima equação

- *Solução* de um sistema linear é uma solução comum a todas as equações desse sistema

Exemplo de um sistema linear a 3 equações e 3 variáveis

$$\begin{cases} 2\,x_1 + \,x_2 + 2\,x_3 = 3 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 + 6\,x_3 = 4 \\ -2\,x_1 - \,x_3 = -3 \end{cases}$$

Com a notação do slide anterior tem-se, por exemplo,

- $a_{11} = 2$: coeficiente da variável x_1 na primeira equação
- $a_{23} = 6$: coeficiente da variável x_3 na segunda equação
- $b_2 = 4$: termo constante ou membro direito da segunda equação
- $b_3 = -3$: termo constante ou membro direito da terceira equação

Exercício

- O que representa geometricamente cada equação ?
- E o que representa geometricamente o sistema linear ?

Conjunto de soluções e classificação de um sistema linear

Resolver um sistema linear é determinar o seu conjunto de soluções (CS).
Um sistema linear é *classificado* como:

- **impossível** (IMP) se não possuir soluções
- **possível** se possuir pelo menos uma solução, sendo:
  - **determinado** (PD), se possuir uma única solução
  - **indeterminado** (PI), se possuir uma infinidade de soluções

Por exemplo, o sistema linear a 2 equações e 2 variáveis,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 & = & 4 \end{array} \right.$$

é PD com $CS = \{(2,1)\}$

Exercício (TPC)

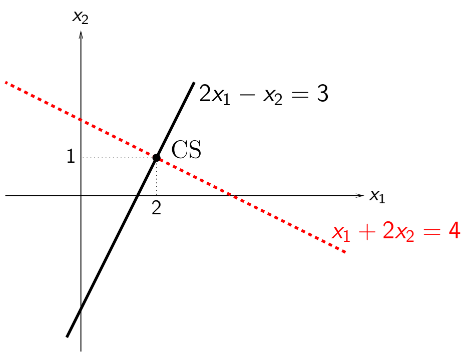
Dar exemplos de sistemas lineares a 2 equações e 2 variáveis que sejam PI e IMP, indicando em cada caso o respectivo CS (Sugestão: adapte o sistema anterior)

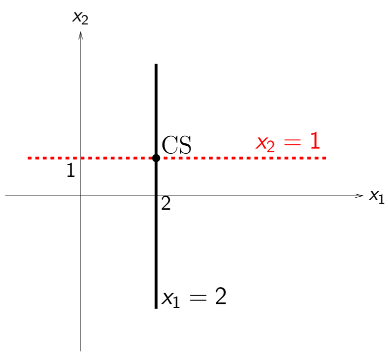
Sistemas equivalentes

- Dois sistemas lineares a m equações e n variáveis dizem-se *equivalentes* se possuem o mesmo conjunto de soluções (CS)

São equivalentes os seguintes sistemas a 2 equações e 2 variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 & = & 4 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 1 \end{array} \right. \text{(sistema reduzido)}$$





- As equações de quaisquer duas retas concorrentes no ponto $(2,1)$ definem um sistema linear equivalente aos sistemas anteriores

Matriz ampliada de um sistema a m equações e n variáveis

Consideremos o sistema linear a m equações e n variáveis,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ chama-se *matriz dos coeficientes* do sistema linear,
- $b = (b_1, \dots, b_m)$ chama-se o *vetor dos termos constantes* ou *membros direitos* do sistema,
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ chama-se *vetor das incógnitas* ou *variáveis* do sistema e finalmente,
- $[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$, chama-se *matriz ampliada do sistema* e contém toda a sua informação relevante

Exemplo

O sistema linear a 3 equações e 3 variáveis,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

tem matriz ampliada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \end{array}\right]$

Para ilustrar o método de eliminação de Gauss vamos resolver este sistema linear aplicando certas operações sobre a sua matriz ampliada. Mas para isso temos que começar por introduzir os conceitos de:

- matriz em escada e matriz reduzida
- operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Matriz em escada e matriz reduzida

- Uma matriz diz-se em *escada* se o primeiro elemento não nulo de cada linha, que se designa por *pivot*, estiver à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior
- Uma matriz diz-se *reduzida* se
  - estiver em escada
  - todos os pivots forem iguais a 1
  - em cada coluna com pivot apenas o pivot é não nulo

Exemplos de matrizes em escada e reduzida com os pivots a vermelho,

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

(I) "Apagador" - Adicionar a uma linha i uma linha $j \neq i$ multiplicada por um escalar λ ($L_i + \lambda L_j \to L_i$)

(II) Multiplicar uma linha i por um escalar $\lambda \neq 0$ ($\lambda L_i \to L_i$)

(III) Permutar uma linha i com uma linha j ($L_i \leftrightarrow L_j$)

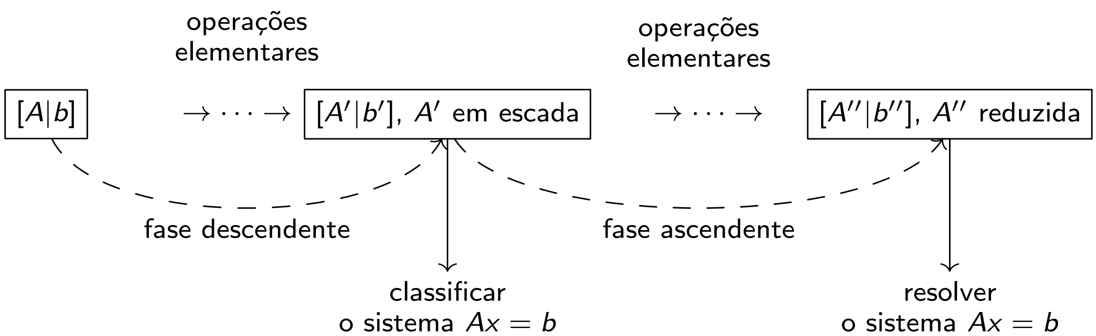
A notação entre parêntesis refere-se à notação usada no Texto de Apoio

Teorema

As operações elementares (I), (II) e (III) transformam a matriz ampliada de um sistema linear na matriz ampliada de um sistema linear equivalente, ou seja, com o mesmo CS

Método de eliminação de Gauss para redução de sistemas

O método de eliminação de Gauss desenvolve-se em duas fases (descendente e ascendente) aplicando operações elementares à matriz ampliada de um sistema linear $[A|b]$, de acordo com o seguinte esquema:



Redução de sistemas lineares pelo método de Gauss

Exemplo na aula

Vejamos como se processa o método de eliminação de Gauss no sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

TPC

Resolver os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \qquad (b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$