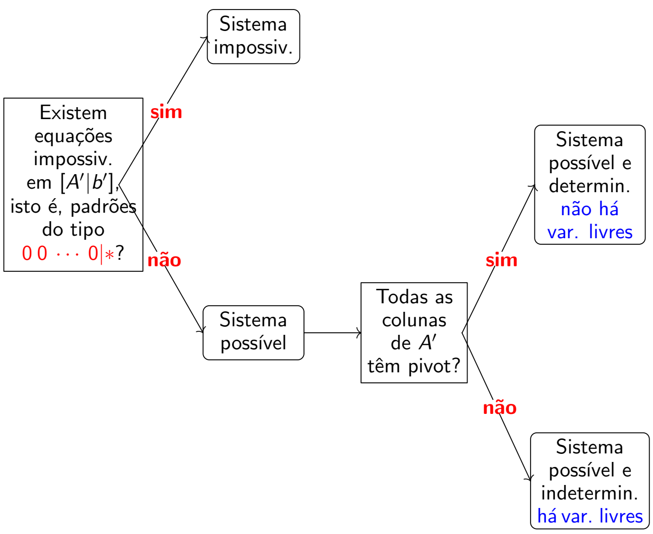
Algoritmo de eliminação de Gauss: fase descendente

- **Input:** Matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear
- **Objectivo:** Redução do sistema linear
- **Fase descendente:**
  - Aplicando operações elementares do tipo III trocar, se necessário, linhas em $[A|b]$ de modo a que o pivot da primeira linha se encontre na coluna não nula mais à esquerda da matriz dos coeficientes
  - Usando operações elementares do tipo I ("Apagador") e o pivot da primeira linha, eliminar os restantes elementos da coluna abaixo desse pivot
  - Repetir os procedimentos anteriores relativamente à submatriz que se obtém ignorando a primeira linha e assim sucessivamente enquanto existirem linhas não nulas na matriz dos coeficientes dessa submatriz

No final da fase descendente obtém-se uma matriz $[A'|b']$ com A' em escada e podemos classificar o sistema

A matriz $[A'|b']$ **não é única**, i.e, depende das operações efetuadas

Discussão do sistema em escada



Observação

As variáveis associadas às colunas sem pivot na matriz em escada designam-se por variáveis livres e podem tomar qualquer valor em $\mathbb{R}$. As variáveis associadas às colunas com pivot na matriz em escada designam-se por variáveis pivot ou variáveis determinadas e são escritas em função das variáveis livres.

Algoritmo de eliminação de Gauss: fase ascendente

- **Fase ascendente:** (apenas se aplica aos sistemas possíveis)
  - Usando operações elementares do tipo II e I tornar o pivot que se encontra mais à direita na matriz A' igual a 1 e usar esse pivot para eliminar os elementos da coluna acima desse pivot
  - Repetir os procedimentos do passo anterior relativamente à coluna com pivot imediatamente anterior e assim sucessivamente enquanto existirem colunas com pivot (percorrendo a matriz da direita para a esquerda)

  No final da fase ascendente obtém-se uma matriz $[A''|b'']$ com A'' reduzida, donde resulta imediatamente o CS do sistema, escrevendo as variáveis pivot em função das variáveis livres. Observemos que:
  - A matriz $[A''|b'']$ é **única**, isto é, não depende da sequência de operações elementares efectuada
  - Dois sistemas lineares são **equivalentes** se e só se aplicando o método de Gauss às respetivas matrizes ampliadas obtemos **a mesma matriz reduzida**

Redução de sistemas lineares - exercício na aula

Considere o sistema linear com um parâmetro $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \quad\;\; -5x_2 - 8x_3 & = & -2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + 4x_2 \;\; + x_3 & = & a \end{cases}$$

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz ampliada do sistema anterior indique os valores do parâmetro a para os quais o sistema é:
  - IMP
  - PD
  - PI. Nessa altura quantas variáveis livres possui? ([2])
- Aplicando a fase ascendente do método de Gauss à matriz em escada obtida na alínea anterior, determine o CS para o(s) valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema é possível. Que tipo de CS obtivemos? ([3])

[2] O sistema é IMP para $a \neq -2$ e PI para $a = -2$ com uma variável livre x_3.

[3] Para $a = -2$, $CS = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{6}{5} + \frac{9}{5}x_3,\ x_2 = \frac{2}{5} - \frac{8}{5}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$, que define uma reta obtida como interseção de 3 planos em $\mathbb{R}^3$

Interpretação geométrica dos sistemas de equações lineares

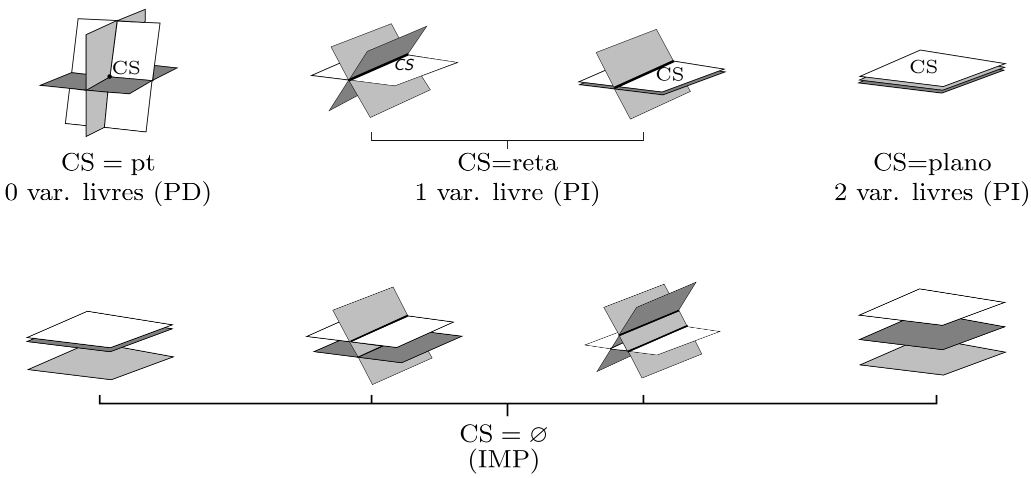
- Geometricamente um sistema linear a m equações e n variáveis representa a intersecção de:
  - m retas em $\mathbb{R}^2$ (plano), se $n = 2$,
  - m planos em $\mathbb{R}^3$ (espaço), se $n = 3$,
  - m hiperplanos em $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 4$.

- O número de variáveis livres de um sistema linear (possível) designa-se por grau de indeterminação do sistema e determina o tipo de CS que o sistema possui. Por exemplo,
  - Se o grau de indeterminação for zero, o CS é um **ponto** (PD)
  - Se o grau de indeterminação for um, o CS é uma **reta** (PI)
  - Se o grau de indeterminação for dois, o CS é um **plano** (PI)

- Iremos principalmente interpretar geometricamente sistemas lineares com 2 e 3 variáveis, ou seja, sistemas lineares cujos CS estão contidos em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

Geometria dos sistemas lineares a 3 equações e 3 incógnitas

- Geometricamente existem os 8 casos distintos representadas na seguinte figura:



Exercício

Dar exemplos de sistemas com 3 equações e 3 variáveis para cada um dos 8 casos anteriores