Uma equivalência fundamental

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz do tipo $m \times n$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

TPC: estabeleça a equivalência acima com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

Sistemas lineares e equações matriciais

Obtivemos portanto a equivalência fundamental,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b,$$

com $A = [a_{ij}]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_m)$, isto é, entre o sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ e a equação matricial $Ax = b$, que permite traduzir sistemas lineares para a linguagem das matrizes.

Observações

- Uma solução do sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ é portanto uma solução de $Ax = b$, isto é, um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = b$
- No que se segue iremos frequentemente chamar sistema linear a uma equação matricial do tipo $Ax = b$

Exemplo - sistemas lineares e equações matriciais

- Considerando novamente o sistema do slide 36, tem-se a equivalência,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - \ x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 + \ x_2 + \ x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad & = & 10 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Podemos verificar que $u = (2, 1, -1)$ é solução do sistema anterior substituindo $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -1$ nas equações desse sistema (confirme) ou, em alternativa, verificando que é solução da equação matricial equivalente $Ax = b$, substituindo x por u nessa equação:

$$Au \;=\; \left[\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 6 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \;=\; b.$$

- A equação linear $ax = 5$, com $a \neq 0$, admite a solução $x = \frac{5}{a} = a^{-1}5$. Vamos ver que se A for invertível podemos, de forma análoga, exprimir a solução u do sistema $Ax = b$ como $u = A^{-1}b$, onde A^{-1} denota a matriz inversa de A, conceito que vamos definir a seguir.

Inversa de uma matriz

Definição de inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *invertível* ou *não singular* se existir uma matriz quadrada B da mesma ordem tal que

$$AB = I_n \qquad \text{e} \qquad BA = I_n,$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n. Caso contrário, A diz-se *singular*. A matriz B, quando existe, designa-se por *inversa* de A

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível com inversa $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

De facto, $AB = BA = I_2$ (verifique!)

Teorema

A inversa de uma matriz A é única (e denota-se por A^{-1})

Demonstração: exercício

Inversa de uma matriz

- Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, pode-se mostrar que $AB = I_n \Rightarrow BA = I_n$ (e reciprocamente). Assim:
  - Para mostrar que A é invertível com inversa B basta verificar que $AB = I_n$ ([4]). Nessa altura, B é invertível com inversa A, ou seja, A e B são inversas uma da outra.
  - Para decidir se A é invertível e calcular a sua inversa (caso seja invertível), basta resolver a equação matricial $AX = I_n$ onde X designa uma matriz quadrada de incógnitas de ordem n. A equação matricial $AX = I_n$ é possível se e só se A for invertível e nessa altura a (única) solução dessa equação é $X = A^{-1}$

[4] ou, em alternativa, verificar que $BA = I_n$

Ainda a inversa...

Exercícios na aula

- Determine (caso exista) a inversa da matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(2,3),$$

resolvendo a equação matricial $AX = I_2$, onde $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}_{2\times 2}$ é uma matriz de incógnitas e $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz identidade de ordem 2.

TPC: mesmo exercício com $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

- Mostre que se B é a inversa de A^2 então AB é inversa de A

Algumas propriedades importantes da inversa

Teorema

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. AB é invertível tendo-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ou seja, a inversa do produto é o produto das inversas, pela ordem inversa ([5])
3. A^T é invertível tendo-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$
5. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

[5] Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são invertíveis da mesma ordem, então $A_1A_2\cdots A_k$ é também invertível e tem-se $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$