Algumas propriedades importantes da inversa

Teorema

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. AB é invertível tendo-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ou seja, a inversa do produto é o produto das inversas, pela ordem inversa ([5])
3. A^T é invertível tendo-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$
5. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

Potências negativas de matrizes invertíveis

Se A é uma matriz invertível, define-se

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

[5] Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são invertíveis da mesma ordem, então $A_1A_2\cdots A_k$ é também invertível e tem-se $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

Exercícios que envolvem inversa e as suas propriedades

TPC

- Mostre que se $A_{n\times n}$ verifica $A^3 - 3A - I_n = 0$ com I_n matriz identidade de ordem n, então A é invertível e indique a sua inversa.
- Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n. Determine X em função de A e B (se existir) tal que

$$(A^{-2}XB^T)^{-1} = 3I_n.$$

Soluções: $A^{-1} = A^2 - 3I_n$, $\quad X = \frac{1}{3}A^2(B^{-1})^T$

Inversa e redução simultânea de sistemas - exemplo

- Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Queremos determinar a solução X de $AX = I_2$ (caso exista). Nessa altura, sabemos que $A^{-1} = X$
- Escrevendo, $X = [x \quad y] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ e $I_2 = [e_1 \quad e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$AX = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 & y_1 + 4y_2 \\ x_1 + 3x_2 & y_1 + 3y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] = [A|e_1] \\ \\ \begin{cases} y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_1 + 3y_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] = [A|e_2] \end{cases}$$

Inversa e redução simultânea de sistemas - exemplo (cont.)

- Portanto resolver a equação matricial $AX = I_2$ é equivalente a resolver dois sistemas lineares, $[A|e_1]$ e $[A|e_2]$ com mesma matriz de coeficientes A
- Podemos reduzir simultaneamente ambos os sistemas anteriores ampliando A com os vetores e_1 e e_2, isto é, com a matriz identidade
- Aplicando a fase descendente a este sistema obtém-se,

$$[A|e_1 \; e_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = [A'|I']$$

e portanto ambos os sistemas $[A\,|\,e_1]$ e $[A\,|\,e_2]$ são PD. Logo a equação matricial $AX = I_2$ é também PD e portanto A é invertível

- Aplicando a fase ascendente, obtém-se

$$[A'|I'] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = [\,I\,|\,x \quad y\,]$$

Logo $x = (-3, 1)$ e $y = (4, -1)$ e tem-se $A^{-1} = X = [x \quad y] = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

isto é, as colunas de A^{-1} são as soluções dos sistemas com matrizes ampliadas $[A|e_1]$ e $[A|e_2]$.

Inversa e redução simultânea de sistemas (caso geral)

- Analogamente pode-se mostrar que resolver a equação matricial $AX = I_n$ com A matriz arbitrária de ordem n, é equivalente a resolver n sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes A,

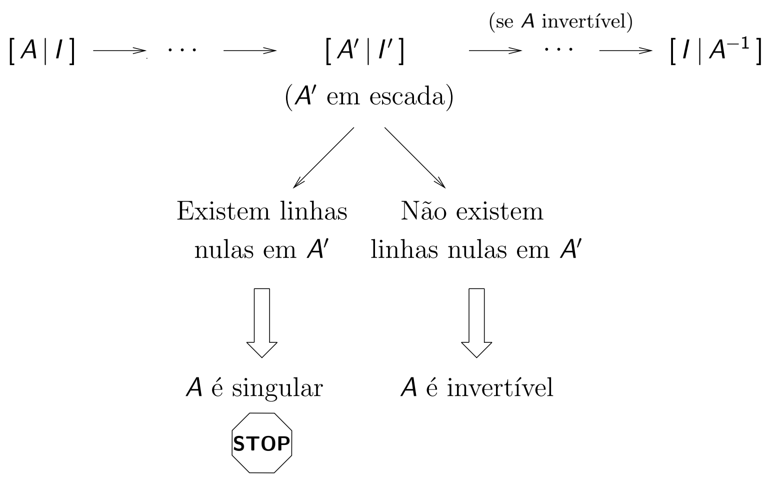
$$[A|e_1], \quad [A|e_2], \quad \cdots, \quad [A|e_n], \tag{1}$$

  onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são as colunas da matriz identidade I_n
- Nessa altura os n sistemas podem ser resolvidos simultaneamente aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[A \mid I_n]$
- Pela unicidade da inversa, ou os n sistemas (**??**) são todos PD e nessa altura A é invertível ou pelo menos um desses sistemas é impossível e nessa altura A é singular
- As colunas de A^{-1} são as soluções dos n sistemas, $[A|e_i]$, $= 1, \ldots, n$
- A redução simultânea de sistemas pode também ser aplicada para resolver equações matriciais mais gerais, do tipo $AX = B$, aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[A|B]$

Algoritmo da inversa

Das considerações dos slides anteriores obtemos o seguinte algoritmo

- `Input:` Matriz quadrada A
- `Objectivo:` Decidir sobre a invertibilidade de A e calcular A^{-1}



Algoritmo da inversa

Exercício na aula

Aplique o algoritmo da inversa para averiguar se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

é invertível e determinar a sua inversa (caso exista!)

Qual a solução da equação matricial $Ax = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(**Sugestão**: ver o slide 53)

E de $Ax = 2e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(**Sugestão**: relacione com a solução de $Ax = e_2$)

Soluções: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$