Aplicação da matriz inversa aos sistemas lineares

- A equação linear $ax = b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ admite a solução (única), $x = \dfrac{b}{a}$, que se pode escrever na forma $x = a^{-1}b$
- A noção de inversa de uma matriz permite obter a solução de um sistema do tipo $Ax = b$ com A invertível, de uma forma análoga.

Teorema

Seja A uma matriz quadrada. As seguintes afirmações são equivalentes:

- A é invertível.
- O sistema linear $Ax = b$ é PD para todo o $b \in \mathbb{R}^n$ (com solução única $x = A^{-1}b$)
- O sistema $Ax = \vec{0}$ tem apenas a solução trivial $x = \vec{0}$ ([6])

TPC: Utilize a inversa para obter novamente as soluções de $Ax = e_1$ e $Ax = 2e_2$, em que A é a matriz do slide 55 e e_1 e e_2 a primeira e segunda colunas da matriz I_3, resp.

[6] Os sistemas lineares $Ax = \vec{0}$ designam-se por sistemas homogéneos e vão ser considerados em detalhe mais adiante.

Critério de invertibilidade

- Para decidir apenas sobre a invertibilidade de uma matriz quadrada A de ordem n, sem pretender calcular a sua inversa, não é necessário ampliar A com a matriz identidade, nem aplicar a fase ascendente do método de Gauss - basta aplicar a fase descendente à matriz A.
- Seja A' uma matriz em escada obtida a partir da matriz quadrada A por aplicação de operações elementares nas linhas de A.

  Tem-se, como vimos no algoritmo da inversa, que:
  - se A' não tem linhas nulas $\Rightarrow$ A é invertível
  - se A' tem linhas nulas $\Rightarrow$ A é singular

Observação

Uma vez que A' é quadrada e está em escada, conclui-se que A' não tem linhas nulas se e só se todas as suas colunas tiverem pivot, o que nos vai permitir obter um critério alternativo para decidir sobre a invertibilidade de uma matriz baseado no número de colunas pivot da matriz em escada. Mas para isso temos primeiro que introduzir o conceito de característica de uma matriz...

Interlúdio: característica de uma matriz

Definição de caracterítica

A característica de uma matriz A, denotada $\mathrm{car}(A)$, é o número de pivots de qualquer matriz em escada obtida a partir de A por aplicação do método de eliminação de Gauss

- A característica está bem definida uma vez que coincide com o número de pivots da matriz reduzida, que é única, e a fase ascendente do método de Gauss não altera o número de pivots
- $\mathrm{car}(A)$ corresponde também ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em escada obtida a partir de A por aplicação do método de eliminação de Gauss
- Uma vez que não pode haver mais que um pivot em cada linha e em cada coluna de uma matriz em escada, a característica de uma matriz $A_{m\times n}$ não pode ultrapassar o número de linhas m nem o número de colunas n de A, isto é, $\mathrm{car}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Exemplo

- Se, por exemplo,

$$A_{4\times 5} \rightarrow \overset{\text{oper. elementares}}{\cdots} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5},$$

tem-se $\mathrm{car}(A) = 3 \leq \min\{4, 5\}$

Inversa e característica

- Para decidir sobre a invertibilidade de uma matriz é suficiente calcular a sua característica. De facto, tem-se o seguinte critério.

Teorema (critério de invertibilidade)

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se $\text{car}(A) = n$

Exercício na aula

Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix}$ é invertível ?

Solução: $\alpha \neq 0, 2$

Sistemas homogéneos

- Uma classe importante de sistemas lineares é constituída pelos sistemas cujos termos constantes são todos nulos, ou seja, da forma
$$Ax = \vec{0},$$
que se designam por sistemas lineares homogéneos. Tem-se que:
- Os sistemas homogéneos possuem sempre a solução trivial $u = \vec{0}$ pois $A\,u = A\,\vec{0} = \vec{0}$ e portanto **nunca são impossíveis**
- Se u e v são soluções do sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$, isto é, se $Au = Av = \vec{0}$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um escalar arbitrário, tem-se
  - $A(u + v) = Au + Av = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$,
  - $A(\lambda u) = \lambda\, Au = \lambda\, \vec{0} = \vec{0}$,

  e portanto $u + v$ e λu são ainda soluções do sistema $Ax = 0$.

As condições anteriores significam, por um lado, que o CS de um sistema homogéno $Ax = 0$ nunca é vazio e por outro lado que é fechado para a adição e para o produto por escalar, o que se traduz dizendo que o CS de um sistema linear homogéneo é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, conceito fundamental que vamos introduzir na próxima aula. . .