O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

No slide 13 mencionámos as seguintes propriedades das operações, adição de vetores de $\mathbb{R}^n$ e produto de um vetor de $\mathbb{R}^n$ por um escalar, que decorrem imediatamente de propriedades análogas sobre os números reais.

Propriedades das operações algébricas com vetores

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

Estas 8 propriedades podem ser resumidas dizendo que o conjunto $\mathbb{R}^n$ com a adição e a multiplicação por escalares tem uma estrutura de *espaço vetorial*...

Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

- Queremos estudar os subconjuntos não vazios $V \subset \mathbb{R}^n$ para os quais se podem adicionar vetores de V e multiplicar vetores de V por escalares sem sair de V, isto é, de modo a ainda se obterem vetores de V.
- Nas condições anteriores pode-se mostrar que são ainda verificadas as propriedades $(1), \ldots, (8)$ relativamente aos vetores de V e portanto que V, com as operações usuais da adição de vetores e da multiplicação de vetores por escalares, herda a estrutura de espaço vetorial que vem de $\mathbb{R}^n$, dizendo-se nessa altura que V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

  Mais precisamente, tem-se a seguinte definição.

Definição de subespaço vetorial

Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um *subespaço vetorial* de $\mathbb{R}^n$ se

- $V \neq \varnothing$
- V é fechado para a adição, isto é, para todo o $u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$
- V é fechado para o produto por escalar, isto é, para todo o $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha u \in V$

Subespaço vetorial

Exercício na aula

Averiguar se os seguintes subconjuntos do plano ($\mathbb{R}^2$) definem subespaços vetoriais:

- $V = \{(x, y) : xy = 0\}$ (eixos coordenados de $\mathbb{R}^2$)
- $V = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ (1^{o} quadrante de $\mathbb{R}^2$)

- Mas afinal que tipo de conjuntos definem os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$?
- Antes de respondermos à questão anterior vamos estabelecer uma condição necessária (mas não suficiente) para que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ defina um subespaço vetorial.

Uma condição **necessária** para ser subespaço vetorial...

- Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, tem-se em particular que:
  - $V \neq \emptyset$, logo
    $$\text{existe um vetor } v \in V$$
  - V é fechado para o produto por escalar, logo
    $$\lambda v \in V, \text{ para todo o } \lambda \in \mathbb{R}$$
  - Em particular, considerando $\lambda = 0$, obtém-se
    $$\lambda v = 0v = \vec{0} \in V$$

Logo tem-se a seguinte condição necessária para ser subespaço vetorial.

Teorema

Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ então $\vec{0} \in V$.

- Por exemplo, $V = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois $(0, 0) \notin V$ $(0^2 + 0^2 \neq 1)$.
  O que representa geometricamente o conjunto V ?

Subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$?

Comecemos por observar que as três condições da definição de subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ (slide 63) são trivialmente verificadas nos seguintes 2 casos:

- $V = \{\vec{0}\}$ que se designa por subespaço vetorial minimal (ou trivial)
- $V = \mathbb{R}^n$ que se designa por subespaço vetorial maximal

Pode-se mostrar que os subconjuntos que definem subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$), do espaço ($\mathbb{R}^3$) e mais geralmente de $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 4$, são dos seguintes tipos:

$\mathbb{R}^2$:	$\{\vec{0}\}$, *retas que passam na origem*, $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^3$:	$\{\vec{0}\}$, *retas e planos que passam na origem*, $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^n$:	$\{\vec{0}\}$, *retas, planos e "hiperplanos" que passam na origem*, $\mathbb{R}^n$

Espaço nulo de uma matriz

Vamos introduzir o primeiro subespaço vetorial fundamental associado a uma matriz

Definição de espaço nulo de uma matriz

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se *espaço nulo de A* e denota-se por $\mathcal{N}(A)$, ao conjunto de soluções do sistema linear homogéneo $Ax = \vec{0}$, isto é,

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = \vec{0} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

Antes de provarmos que o espaço nulo define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ vamos calcular esse subespaço nalguns exemplos

Espaço nulo - exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(A) &= \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, Ax = \vec{0}\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ \hline 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,:\, \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}
\end{aligned}$$

Logo, para determinar $\mathcal{N}(A)$ tem que se reduzir a matriz ampliada do sistema $Ax = \vec{0}$,

$$[\,A\,|\,\vec{0}\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Espaço nulo - exemplo (cont.)

Reduzindo a matriz ampliada $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ do slide anterior vem,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(A) &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0,\ x_2 = x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(0,1,1) : x_3 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

- Geometricamente $\mathcal{N}(A)$ define uma reta de $\mathbb{R}^3$ (porque o sistema $Ax = \vec{0}$ possui uma variável livre), que passa na origem (porque o sistema é homogéneo) e que tem vetor diretor $v = (0, 1, 1)$([7])
- Uma vez que $\mathcal{N}(A)$ define uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, conclui-se pelo slide 66 que $\mathcal{N}(A)$ define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$
- Em alternativa, pode-se verificar facilmente que $\mathcal{N}(A)$ verifica as 3 condições da definição de subespaço vetorial do slide 63, o que fica como exercício.

---

[7] Esta reta é obtida como intersecção de 2 planos de $\mathbb{R}^3$ que passam na origem, uma vez que a equação matricial $Ax = \vec{0}$ é equivalente a um sistema linear homogéneo com 2 equações e 3 variáveis (ver o slide anterior)