Cálculo do espaço nulo - exemplo 2

Consideremos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss obtém-se,

$$[\,A\,|\,\vec{0}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{array}\right] = [\,A'\,|\,\vec{0}\,].$$

  Uma vez que todas as colunas de A' têm pivot (isto é, $\text{car}(A) = 2 = n$), o sistema $Ax = 0$ é determinado e portanto possui apenas a solução trivial $x_1 = x_2 = 0$ ([8])

- Logo $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, $\mathcal{N}(A)$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^2$.

Critério para $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal)

Se $A_{m\times n}$ tem-se $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow Ax = \vec{0}$ é determinado $\Leftrightarrow \text{car}(A) = n$.

[8]Confirme que aplicando a fase ascendente à matriz ampliada $[\,A'\,|\,\vec{0}\,]$ se obtém a matriz $[\,I_2\,|\,\vec{0}\,]$, com I_2 a matriz identidade de ordem 2, e portanto que a solução (única) do sistema é $x_1 = x_2 = 0$, isto é, $CS = \{(0,0)\}$.

O espaço nulo é um subespaço vetorial...

Teorema

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Tem-se que $\mathcal{N}(A)$ define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

Demonstração

Temos que verificar as 3 condições da definição de subespaço vetorial do slide 63:

- $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$, ou seja, o sistema $Ax = \vec{0}$ possui pelo menos uma solução.
- $\mathcal{N}(A)$ é fechado para a adição, ou seja, se u e v são soluções de $Ax = 0$ então $u + v$ ainda é solução de $Ax = 0$.
- $\mathcal{N}(A)$ é fechado para o produto por escalar, ou seja, se u é solução de $Ax = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então λu ainda é solução de $Ax = 0$.

As 3 condições anteriores resultam imediatamente das considerações feitas no slide 61. $\square$

Consequências e exemplos

O CS de qualquer sistema linear homogéneo com n variáveis define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, pois corresponde ao espaço nulo da matriz dos coeficientes desse sistema.

- Por exemplo, o seguinte CS de um sistema homogéneo,

  $$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\}$$

  é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, pois $V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

O CS de um sistema linear não homogéneo nunca define um subespaço vetorial uma vez que não contém o vetor nulo (origem).

- Por exemplo, o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação não homogénea $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$,

  $$V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\},$$

  não define um subespaço vetorial porque não contém a origem.

Combinação linear de vetores

Definição de combinação linear

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é *combinação linear* (CL) de $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ chamam-se *coeficientes* da combinação linear

Por outras palavras, $b \in \mathbb{R}^m$ é CL de $v_1, \ldots, v_n$ se puder ser obtido como soma de múltiplos desses vetores

- $b = (-2, -4, -2)$ é CL de $v_1 = (1, 2, 1)$ pois $b = -2v_1$ ($\alpha_1 = -2$)
- $b = (3, 1)$ é CL de $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, 0)$, pois
  $b = (3, 1) = 1(1, 1) + 2(1, 0) = v_1 + 2v_2$ ($\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$)
- $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ é CL de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pois $\vec{0} = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_n$
  ($\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$)
- v_1 é CL de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pois $v_1 = 1\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_n$
  ($\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$)
- Em geral, cada v_i é CL de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ($\alpha_i = 1$ e $\alpha_j = 0$ se $j \neq i$)

Determinação da combinação linear de vetores - exemplo

- Será que $b = (2,5,1)$ é CL de $v_1 = (2,2,1)$ e $v_2 = (2,3,1)$?
- Por outras palavras, será que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \ ?$$

Ora,

$$\begin{aligned} b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Determinação da combinação linear de vetores - exemplo

- Logo se $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ então (α_1, α_2) é solução do sistema linear $[\, v_1 \;\; v_2 \mid b \,]$
- Aplicando o método de Gauss a este sistema, obtém-se (verifique!),

$$[\, v_1 \;\; v_2 \mid b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Como o sistema é possível podemos escrever b como CL de v_1 e v_2 com coeficientes α_1 e α_2. Para determinar esses coeficientes aplicamos a fase ascendente do método de eliminação de Gauss, obtendo-se,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

- Assim, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -2v_1 + 3v_2$