Determinação de combinações lineares de vetores - resumo

Pretende-se decidir se $b \in \mathbb{R}^m$ é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$

Designando $A = [\ v_1\ v_2\ \cdots\ v_n\ ]$ e aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz ampliada $[A|b] = [\ v_1\ v_2\ \cdots\ v_n \mid b\ ]$ do sistema $Ax = b$ vem

$$[A|b] = [\ v_1\ v_2\ \cdots\ v_n \mid b\ ] \ \rightarrow\ \cdots\ \rightarrow [A'|b'] \ \ (\text{com } A' \text{ em escada}).$$

Tem-se então o seguinte:

- Se $[\ A \mid b\ ]$ for impossível, então b não é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$;
- Se $[\ A \mid b\ ]$ for possível, b é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$, tendo-se:
  - Se $[\ A \mid b\ ]$ for PD, b escreve-se como combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ de uma única forma;
  - Se $[\ A \mid b\ ]$ for PI, b escreve-se como combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ de infinitas maneiras distintas;

Observação

Para escrever a CL aplica-se a fase ascendente do método de Gauss à matriz $[A'|b']$ (caso o sistema seja possível). Cada solução $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ deste sistema dá origem a uma CL $b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Determinação de comb. linear de vetores - exemplos

- Justifique que $c = (0, 0, 1)$ não é CL de $v_1 = (2, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 3, 1)$.
  De facto, aplicando a fase descendente ao sistema $[\ A \mid c\ ] = [\ v_1\ v_2 \mid c\ ]$ vem,

$$[\ A \mid c\ ] = [\ v_1\ v_2 \mid c\ ] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]. \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right] = [\ A' \mid c'\ ]$$

  Como o sistema é IMP, c não é CL de v_1 e v_2.

- Justifique que $b = (5, 1)$ é CL de $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, 0)$ e $v_3 = (1, -2)$ de infinitas maneiras distintas e escreva essa CLs
  De facto, aplicando a fase descendente ao sistema $[\ A \mid b\ ] = [\ v_1\ v_2\ v_3 \mid b\ ]$ vem,

$$[A|b] = [v_1\ v_2\ v_3|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] = [A'|b']$$

  Como o sistema é PI, b é CL de v_1, v_2 e v_3 de infinitas formas distintas. Para determinar essas CLs aplica-se a fase ascendente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 + 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = 4 - 3\alpha_3. \end{cases}$$

  Obtém-se uma infinidade de CLs consoante o valor da coeficiente $\alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} &= (1 + 2\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (4 - 3\alpha_3)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= (1 + 2\alpha_3)v_1 + (4 - 3\alpha_3)v_2 + \alpha_3 v_3. \end{aligned}$$

Conceitos de espaço gerado e espaço das colunas

Definições de espaço gerado por vetores e espaço das colunas de uma matriz

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [\ v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n\ ]$.

- Chama-se *espaço gerado* por $v_1, \ldots, v_n$, e denota-se por $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, ao subconjunto dos vetores de $\mathbb{R}^m$ que são CL de $v_1, \ldots, v_n$, isto é,

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \{ b \in \mathbb{R}^m \ : \ b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \text{ com } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}.$$

- Chama-se *espaço das colunas* de A, e denota-se por $\mathcal{C}(A)$, ao espaço gerado pelos vetores que constituem as n colunas de A, isto é,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.$$

Pelos resultados do slide 76 tem-se

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \Big\{ b \in \mathbb{R}^m \colon [\ A \mid b\ ] \text{ é possível} \Big\}.$$

Nas condições das definições anteriores tem-se o seguinte resultado que nos dá o segundo subespaço vetorial fundamental associado a uma matriz.

Teorema

Tem-se que $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Espaço gerado e das colunas - exemplos dos slides 74 e 77 revisitados

- Consideremos novamente os vetores $v_1 = (2, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 3, 1)$ e seja $A = [\ v_1\ \ v_2\ ]$

- Tem-se,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A) &= \{ b \in \mathbb{R}^3 \ : \ Ax = b \text{ é possível} \} \\ &= \{ b \in \mathbb{R}^3 \ : \ [A|b] \text{ é possível} \} \end{aligned}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$ tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_3 \end{array} \right]$$

Espaço gerado e das colunas - exemplos dos slides 74 e 77 revisitados (cont.)

- Logo o sistema $Ax = b$ é possível sse $b_1 - 2b_3 = 0$ e portanto,
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \; : \; b_1 - 2b_3 = 0\},$$
que define o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.

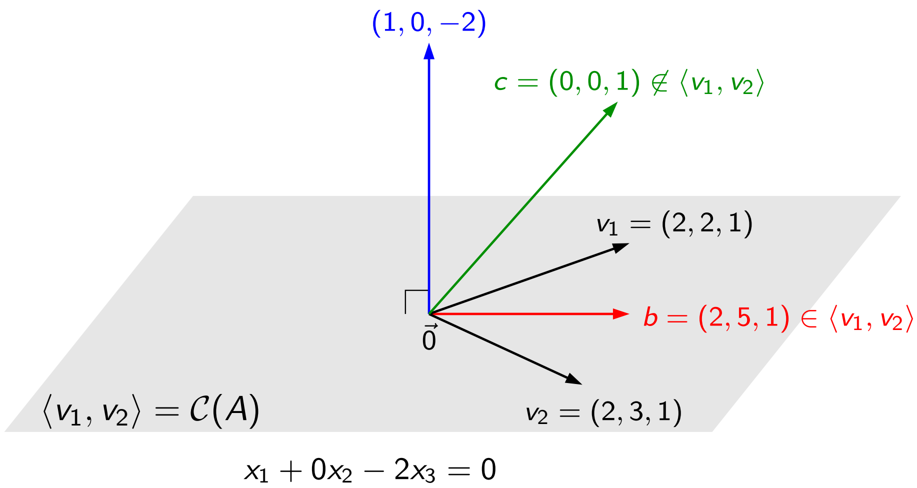
  Os vetores que são CL de v_1 e v_2 são os vetores do espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle$, isto é, os vetores $b = (b_1, b_2, b_3)$ que satisfazem a equação do plano $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.

  Por exemplo:

  - O vetor $b = (2, 5, 1) = -2v_1 + 3v_2$ (ver o slide 75) é CL de v_1 e v_2 e portanto pertence ao espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, o que se verfica pois satisfaz a equação $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.

  - Já o vetor $c = (0, 0, 1)$ do slide 77 não é CL de v_1 e v_2 (como vimos) e portanto não pertence ao espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, o que se verifica pois não satisfaz a equação $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.

Espaço gerado e das colunas - interp. geom. dos exemplos dos slides 74 e 77



Algoritmo para determinar o espaço das colunas / espaço gerado

- `Input:` Matriz quadrada $A_{m\times n} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$
- `Objectivo:` Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$
- Considerar o vetor genérico $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ e aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz ampliada do sistema $Ax = b$:

$$[A|b] \;\to\; \cdots \;\to [A'|b'] \;\; \text{(com } A' \text{ em escada)}$$

Tem-se $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \Big\{ b \in \mathbb{R}^m \colon Ax = b \text{ é possível} \Big\}$. Logo:

  - se A' não tem linhas nulas, $[A|b]$ é possível para qualquer b e obtém-se
  $$\mathcal{C}(A) \;=\; \mathbb{R}^m,$$
  ou seja, $v_1, \ldots, v_n$ geram $\mathbb{R}^m$.
  - se A' tem linhas nulas com índices $i_1, i_2, \ldots, i_k$, então
  $$\mathcal{C}(A) = \{(b_1, \ldots, b_m) \;:\; b'_{i_1} = b'_{i_2} = \cdots = b'_{i_k} = 0\} \neq \mathbb{R}^m,$$
  ou seja, obtém-se um sistema de equações definidoras para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, anulando as componentes do vetor b' que estão associadas às linhas nulas da matriz em escada A'.