(In)dependência linear

Definição de (in)dependência linear([9])

- Um conjunto formado por um único vetor $\{v\}$ diz-se linearmente dependente se $v = \vec{0}$ e diz-se linearmente independente se $v \neq \vec{0}$.
- Um conjunto com dois ou mais vetores $\{v_1, \ldots, v_k\}$ diz-se linearmente dependente se pelo menos um dos vetores v_i for combinação linear dos restantes vetores do conjunto. Caso contrário, diz-se linearmente independente.

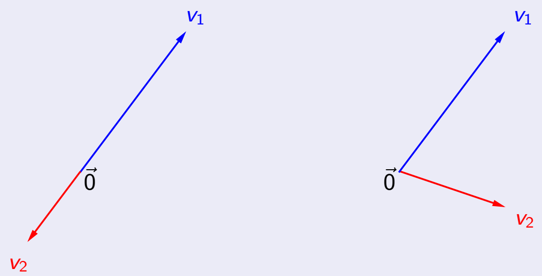
- Um conjunto de vetores é portanto linearmente independente quando não existem relações de linearidade entre esses vetores, no sentido em que nenhum desses vetores se pode escrever como CL dos restantes vetores.
- No caso do conjunto conter apenas 2 vetores, isso significa que nenhum dos 2 vetores é múltiplo do outro vetor.

[9] A definição que está no *Texto de Apoio* é a definição mais usual que aparece na literatura, mas é menos intuitiva e envolve o conceito de combinação linear nula.

(In)dependência linear

Consequências

- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente se e só se v_1 e v_2 não são múltiplos um do outro, isto é, se e só se v_1 e v_2 são não colineares.



$\{v_1, v_2\}$ l.d. $\{v_1, v_2\}$ l.i.

- Um conjunto de vetores que contenha um conjunto linearmente dependente é ainda linearmente dependente. Em particular, um conjunto de vetores que contenha o vetor nulo ou vetores múltiplos entre si é linearmente dependente.
- Reciprocamente, um subconjunto não vazio de um conjunto linearmente independente de vetores é ainda linearmente independente.

(In)dependência linear

Exemplos

- $\{v_1\} = \{(0,0,0)\}$ é lin. dept. pois $v_1 = \vec{0}$.
- $\{v_1\} = \{(1,2,3)\}$ é lin. indept. pois $v_1 \neq \vec{0}$.
- $\{v_1, v_2\} = \{(0,0,0),(1,2,3)\}$ é lin. dept. pois $v_1 = 0\, v_2$ (conjuntos de vetores que contenham o vetor nulo são lin. dept.).
- $\{v_1, v_2\} = \{(1,2,3),(2,4,6)\}$ é lin. dept. pois $v_2 = 2\, v_1$, isto é, são colineares.
- $\{v_1, v_2\} = \{(1,2,3),(0,0,1)\}$ é lin. indept. pois nenhum dos vetores é múltiplo do outro, isto é, são não colineares.
- $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,2,3),(2,4,6),(0,0,1)\}$ é lin. dept. pois $v_2 = 2v_1 + 0v_3$ (conjuntos de vetores que contenham vetores múltiplos entre si são lin. dept.).
- $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{(1,2,0,1),(1,1,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-1)\}$ (?).
- $\{v_1, v_2, v_4\} = \{(1,2,0,1),(0,1,1,1),(1,0,0,-1)\}$ (?).

Exemplos (cont.)

Consideremos agora o penúltimo exemplo do slide 85,

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{(1,2,0,1),(1,1,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-1)\}.$$

Aplicando a fase descendente à matriz $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \,]$ obtém-se

$$A = [\, v_1 \;\; v_2 \mid v_3 \;\; v_4 \,] \to \cdots \to A' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

"Ignorando" a última coluna, conclui-se que v_3 é CL de v_1 e v_2, porque o sistema $[\, v_1 \;\; v_2 \mid v_3 \,]$ é possível (uma vez que a terceira coluna de A' não tem pivot). Logo existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2.$$

Esta CL pode ser estendida ao vetor v_4 multiplicando-o pelo coeficiente nulo:

$$v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0\, v_4.$$

Logo um dos vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é CL dos restantes 3 vetores do conjunto e portanto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é linearmente dependente.

Note-se que a CL $v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + 0\, v_4 \Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - v_3 + 0\, v_4 = \vec{0}$, o que implica que o sistema homogéneo $[\, A \mid \vec{0} \,] = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 v_4 \mid \vec{0} \,]$ é indeterminado, uma vez contém a solução não trivial $(\alpha_1, \alpha_2, -1, 0) \neq \vec{0}$.

Exemplos (cont.)

Consideremos agora o último exemplo do slide 85,

$$\{v_1, v_2, v_4\} = \{(1,2,0,1), (0,1,1,1), (1,0,0,-1)\}.$$

Aplicando a fase descendente à matriz $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_4 \,]$ obtém-se

$$A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_4 \,] \to \cdots \to A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso todas as colunas de A' têm pivot, isto é, $car(A) = 3 = n$.

Portanto o sistema homogéno $[\, A \,|\, \vec{0} \,]$ só tem a solução trivial $\vec{0}$ o que implica que nenhum dos vetores pode ser CL dos restantes 2 vetores (caso contrário iriam existir soluções não triviais deste sistema como ocorreu no exemplo do slide anterior). Logo $\{v_1, v_2, v_4\}$ é linearmente independente.

Observação

Mais geralmente, considerando $A_{m\times n} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,] \to \cdots \to A'$, pode-se mostrar que cada vetor de $\{v_1 \;\; v_2, \ldots, v_n\}$ associado a uma coluna sem pivot em A' é CL dos restantes vetores do conjunto. Reciprocamente, se todas as colunas de A' tiverem pivot, o sistema $Ax = \vec{0}$ é determinado e pode-se mostrar que nenhum dos vetores de $\{v_1 \;\; v_2, \ldots, v_n\}$ é CL dos restantes vetores do conjunto.

Caracterização da (in)dependência linear

A partir da observação do slide anterior obtém-se imediatamente o seguinte critério baseado no método de Gauss para decidir a independência linear de um conjunto de vetores.

Critério para decidir a independência linear de um conjunto de vetores

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e consideremos $A_{m\times n} = [\, v_1 \;\; \cdots \;\; v_n \,] \to \cdots \to A'$ com A' matriz em escada. Têm-se então as seguintes equivalências:

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ é linearmente independente}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{Todas as colunas de } A' \text{ têm pivot}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{car}(A) = n$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$$

Independência linear

Uma vez que $\text{car}(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$, tem-se seguinte resultado.

Cardinalidade máxima de um conjunto linearmente independente

Um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^m$ contém no máximo m vetores.

Exercícios na aula

- Sejam $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (\alpha, 3, 3)$.
  Decida sobre a independência linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ em função de α.
- Decida sobre a independência linear de
  $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (10, 11, 12)\}$.

Solução: $\alpha \neq -3, 2$ Qualquer conjunto com mais que 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ é l.d.