Base e dimensão de um subespaço vetorial

Definição de base

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Diz-se que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é *base* de V se

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente
- $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$, isto é, $v_1, \ldots, v_n$ geram de V.

- Intuitivamente uma base de um subespaço vetorial V é um subconjunto de vetores de V que não contém vetores redundantes (i.e., nenhum vetor do subconjunto é CL dos restantes vetores do subconjunto) e tal que todo o vetor de V é combinação linear dos vetores da base.
- Pode-se mostrar que quaisquer duas bases de um subespaço vetorial V possuem o mesmo número de vetores. Faz portanto sentido o seguinte.

Definição de dimensão

Chama-se dimensão de um subespaço vetorial V e denota-se $\dim V$, ao número de vetores de uma qualquer base de V.

Convenciona-se que $\{\}$ é a base do subespaço mininal $\{\vec{0}\}$, tendo-se portanto que $\dim\{\vec{0}\} = 0$, uma vez que esta base não contém vetores.

Base canónica e dimensão do subespaço maximal $\mathbb{R}^m$

Sejam $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ (colunas da matriz identidade de ordem 3, I_3). Vejamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$

- Para qualquer $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned}(b_1, b_2, b_3) &= b_1(1,0,0) + b_2(0,1,0) + b_3(0,0,1)\\ &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3\end{aligned}$$

  Logo todo o vetor $b \in \mathbb{R}^3$ é CL de e_1, e_2 e e_3 e portanto $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.
- $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente pois $[\, e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \,]$ é a matriz identidade I_3, que já está em escada e tem todas as colunas com pivot.

Logo $\{e_1, e_2, e_2\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, sendo designada por base canónica de $\mathbb{R}^3$. Em particular $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (número de vetores da base). Mais geralmente, tem-se:

Base canónica e dimensão de $\mathbb{R}^m$

O conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ formado pelas m colunas da matriz identidade I_m,

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), \; e_2 = (0,1,\ldots,0), \; \ldots, e_m = (0,0,\ldots,1),$$

é uma base de $\mathbb{R}^m$ que se designa por base canónica (b.c.) de $\mathbb{R}^m$.
Em particular,

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^m = m}$$

Caracterização das bases de $\mathbb{R}^m$

- Vimos no slide anterior que $\mathbb{R}^m$ admite a base canónica formada pelos vetores que constituem as m colunas da matriz identidade, e em particular que $\dim \mathbb{R}^m = m$. Logo qualquer base de $\mathbb{R}^m$ possui m vetores.
- Por outro lado, uma base tem que ser um conjunto linearmente independente.

O próximo resultado mostra que estas duas condições são também suficientes.

Critério para definir base do subespaço maximal $\mathbb{R}^m$

Sejam $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^m$. Tem-se que

$$\{v_1, \ldots, v_m\} \text{ é base de } \mathbb{R}^m \quad \Leftrightarrow \quad \{v_1, \ldots, v_m\} \text{ é linearmente independente.}$$

Por outras palavras, as bases de $\mathbb{R}^m$ são os conjuntos linearmente independentes formados por m vetores de $\mathbb{R}^m$.

De facto, considerando $A_{m\times m} = [\, v_1 \ \ \cdots \ \ v_m \,] \to \cdots \to A'$ com A' em escada, tem-se que as m colunas de A' têm pivot porque $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é l.i. Logo todas as linhas A' também têm pivot porque o número de linhas de A' = colunas de A'. Logo A' não possui linhas nulas e portanto o sistema $[\, A \mid b \,]$ é possível para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$, obtendo-se (ver também o slide 82),

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \ : \ [\, A \mid b \,] \ \text{ é possível}\} = \mathbb{R}^m.$$

Logo $\{v_1, \ldots, v_m\}$ verifica as duas condições da definição de base do slide 90.

Bases de $\mathbb{R}^3$

Exercícios na aula

Quais dos seguintes conjuntos de vetores definem bases de $\mathbb{R}^3$?

- $\{(1,0,0),(2,5,0)\}$.
- $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,8,0)\}$.
- $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,8,9)\}$.
- $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(10,11,12)\}$.

Nos casos em que não define uma base identifique a(s) condição (ões) da definição de base do slide 90 que falha(m).

Solução: Apenas o terceiro. Não gera $\mathbb{R}^3$, — falham as duas — não é l.i.

Construção de bases para subespaços vetoriais

Um subespaço vetorial V pode ser definido de duas formas distintas:

- *Como CS de um sistema de equações lineares homogéneas* / *espaço nulo de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 6x_2 = 0\}$,

  $$\text{ou seja,} \quad V = \mathcal{N}(A), \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Gerado por um conjunto de vetores* / *espaço das colunas de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \langle (1,1,0,1), (1,2,-1,0), (1,0,1,2), (2,1,1,3) \rangle$,

  $$\text{ou seja,} \quad V = \mathcal{C}(A), \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Base para o espaço nulo de uma matriz / CS sistema linear homogéneo

Algoritmo

`Input:` Matriz A do tipo $m \times n$
`Objectivo:` Base para $\mathcal{N}(A)$

- Determinar $\mathcal{N}(A)$ resolvendo o sistema homogéneo $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$.
  Seja k o número de variáveis livres do sistema.
- Se $k = 0$ então $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.
- Se $k > 0$, associamos alternadamente a cada variável livre a solução do sistema em que essa variável livre toma o valor 1 (ou qualquer valor não nulo) e as restantes variáveis livres o valor zero.

  O conjunto das k soluções de $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ obtidas deste modo constitui uma base para $\mathcal{N}(A)$.

Em particular,

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) = \text{número de variáveis livres} = n - \text{car}(A)}$$

Base para o espaço nulo de uma matriz / CS sistema homogéneo

Exercícios na aula

Indique uma base e a dimensão dos seguintes subespaços vetoriais:

- O espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.
- O hiperplano de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}$$

- **TPC**: calcular uma base para o espaço nulo do slide 93.

Exercício na aula - resolução

Vamos determinar uma base do espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

Reduzindo a matriz $[\,A \,|\, \vec{0}\,]$ obtém-se (verifique),

$$[\,A \,|\, \vec{0}\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 \qquad 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Como existem variáveis livres (x_3 e x_4), $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$, obtendo-se

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 = x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) :\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\,x_3, x_3, x_3, 0) + (-4\,x_4, x_4, 0, x_4) :\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \underbrace{\{x_3(-2,1,1,0) + x_4(-4,1,0,1) :\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\}}_{\text{todas as somas de múltiplos de } (-2,1,1,0) \text{ e } (-4,1,0,1)} \\ &= \langle (-2,1,1,0), (-4,1,0,1) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

Logo $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{N}(A)$. Como v_1 e v_2 não são múltiplos entre si, $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$ (ver a definição de base do slide 90), tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 2 =$ número de variáveis livres de $[\,A \,|\, \vec{0}\,]$.