## Exercício na aula - observações

- O primeiro vetor da base do slide anterior, $v_1 = (-2, 1, 1, 0)$, corresponde à solução do sistema homogéneo $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ considerando a variável livre $x_3 = 1$ e a variável livre $x_4 = 0$. De facto,

$$(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{\substack{x_3\,=\,1\\ x_4\,=\,0}} (-2, 1, 1, 0) = v_1.$$

- Analogamente, o segundo vetor da base, $v_2 = (-4, 1, 0, 1)$, corrresponde à solução do sistema homogéneo $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ com $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$:

$$(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{\substack{x_3\,=\,0\\ x_4\,=\,1}} (-4, 1, 0, 1) = v_2.$$

- O processo descrito no slide anterior para determinar uma base de $\mathcal{N}(A)$, pode ser generalizado para uma matriz $A$ arbitrária (desde que o sistema $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ possua variáveis livres) e conduz sempre a bases de $\mathcal{N}(A)$, não sendo necessário provar que o conjunto é linearmente independente.

- Se o sistema $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ não possuir variáveis livres então é determinado, tendo-se $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$. Nesse caso a base de $\mathcal{N}(A)$ é $\{\}$ e $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.



## Base e dimensão do CS de um sistema linear homogéneo / espaço nulo

Determinar uma base para o hiperplano de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\} = \mathcal{N}([\,1 \quad -2 \quad 1 \quad -5\,]).$$

- Tem-se,

$$\begin{aligned} V &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 2x_2 - x_3 + 5x_4,\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x_2 - x_3 + 5x_4, x_2, x_3, x_4) :\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x_2, x_2, 0, 0) + (-x_3, 0, x_3, 0) + (5x_4, 0, 0, x_4) :\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \underbrace{\{x_2(2, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(5, 0, 0, 1) :\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}}_{\text{todas as somas de múltiplos de } (2,1,0,0),\ (-1,0,1,0) \text{ e } (5,0,0,1)} \\ &= \langle (2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (5, 0, 0, 1)\rangle. \end{aligned}$$

Logo $(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (5, 0, 0, 1)$ geram $V$.

- Note-se que $(2, 1, 0, 0)$ corrresponde à solução em que $x_2 = 1$ e $x_3 = x_4 = 0$, $(-1, 0, 1, 0)$ à solução com $x_3 = 1$ e $x_2 = x_4 = 0$ e finalmente, $(5, 0, 0, 1)$ à solução com $x_4 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$.
- O conjunto das soluções do espaço nulo em que alternadamente, uma das variáveis livres é não nula e as restantes variáveis livres são nulas, é sempre linearmente independente (confirme a independência linear).

Logo $\{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (5, 0, 0, 1)\}$ é base de $V$. Em particular, $\dim V = 3 =$número de vetores da base $=$ número de variáveis livres.

## Exercício na aula - base para espaço das colunas

Vamos determinar uma base para o espaço nulo das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \,].$$

Recordemos que $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \{b = (b_1, b_2, b_3) \,:\, [\,A \,|\, b\,] \text{ é possível}\}$.
Aplicando a fase descendente à matriz $[\,A \,|\, b\,]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & b_2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + \frac{3}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

Logo para o sistema $[\,A \,|\, b\,]$ ser possível, $b_3' = b_3 + \frac{3}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 = 0$ e portanto

$$\mathcal{C}(A) \;=\; \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \;=\; \left\{ b = (b_1, b_2, b_3) \,:\, b_3 + \tfrac{3}{2}b_1 - \tfrac{1}{2}b_2 = 0 \right\}.$$

Uma vez que as que as operações elementares que são efetuadas no método de Gauss dependem apenas dos pivots e as colunas sem pivot não influenciam a discussão do sistema $[\,A \,|\, b\,]$, podemos eliminar a terceira e quarta colunas de $A$ (associadas às colunas sem pivot em $A'$), sem alterar o espaço das colunas, isto é,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \left\{ b = (b_1, b_2, b_3) \,:\, b_3 + \tfrac{3}{2}b_1 - \tfrac{1}{2}b_2 = 0 \right\} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Como $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, porque está associado às colunas com pivot em $A'$, e gera $\mathcal{C}(A)$, conclui-se que $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.
Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car}(A) = 2$ (número de pivots em $A'$).



## Base para o espaço das colunas / espaço gerado por um conjunto de vetores

### Algoritmo

`Input:` $A = [\, v_1 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$, com $v_1 \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.
`Objectivo:` Base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz $A$:
  $$A \to \cdots \to A' \text{ com } A' \text{ escada.}$$
- Para obtermos uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ consideramos o subconjunto das colunas de $A$ associado às colunas com pivot em $A'$.

Em particular, tem-se

$$\boxed{\dim \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car}(A) = \text{número de pivots em } A'}$$

- Voltando ao exemplo do slide anterior, tem-se que $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, porque $v_1$ e $v_2$ são as colunas de $A$ associadas às colunas com pivot em $A'$ ($1^a$ e $2^a$ colunas de $A'$).
- Em particular, $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$, o que significa que os geradores $v_3$ e $v_4$, associados às colunas sem pivot em $A'$, são redundantes.
- A característica de uma matriz $A$ é muitas vezes definida como $\dim \mathcal{C}(A)$.

## Relação entre as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\mathcal{C}(A)$

- Seja $A$ matriz do tipo $m \times n$. Pelos resultados dos slides 95 e do slide anterior, tem-se
  - $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car}(A)$
  - $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A)$
- Daqui resulta imediatamente a seguinte resultado que estabelece uma relação entre as dimensões dos dois espaços fundamentais associados a uma matriz $A$

### Proposição

Se $A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de colunas de } A = n}$$



## Subespaço vetorial e dimensão

- O conhecimento da dimensão de um subespaço vetorial permite conhecer o tipo de conjunto que esse subespaço vetorial define
- No caso de subespaços vetoriais do plano e do espaço, tem-se

| | subespaços vetoriais | dimensão |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}^2$ | $\{\vec{0}\}$ | 0 |
| | retas que passam na origem | 1 |
| | $\mathbb{R}^2$ | 2 |
| $\mathbb{R}^3$ | $\{\vec{0}\}$ | 0 |
| | retas que passam na origem | 1 |
| | planos que passam na origem | 2 |
| | $\mathbb{R}^3$ | 3 |

Em geral, têm-se as seguintes caracterizações dos subespaços minimal e maximal de $\mathbb{R}^m$ ($m$ arbitrário), em termos das suas dimensões:

- $V = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal) $\Leftrightarrow$ $\dim V = 0$
- $V = \mathbb{R}^m$ (subespaço maximal) $\Leftrightarrow$ $\dim V = m$

# Inclusão / igualdade de subespaços vetoriais e dimensão

- Pelo quadro do slide anterior, se um subespaço vetorial $U$ estiver contido num subespaço vetorial $V$ de dimensão um (reta) em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$, então $U = \{\vec{0}\}$ se $\dim U = 0$, ou $U$ define uma reta se $\dim U = 1$, tendo-se nesse caso $U = V$
- Analogamente, se $U$ estiver contido num subespaço vetorial $V$ de dimensão dois (plano) em $\mathbb{R}^3$, então $U = \{\vec{0}\}$ se $\dim U = 0$, $U$ é uma reta se $\dim U = 1$, ou $U$ define um plano se $\dim U = 2$, tendo-se nesse caso $U = V$

Mais geralmente, tem-se o seguinte resultado.

### Teorema

Sejam $U$ e $V$ subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^m$ com $U \subset V$. Então $\dim U \leq \dim V$, tendo-se $U = V$ se e só se $\dim U = \dim V$

Para podemos usar o resultado anterior vamos começar ver como é que podemos mostrar que um subsepaço dado por geradores está contido noutro subespaço vetorial.



# Vetor pertence ao espaço nulo / colunas de uma matriz

### Recordatória

Sejam $A_{m\times n}$, $u \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então:

- $u \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow Au = \vec{0}$
- $b \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow [\, A \mid b \,]$ é possível.

### Exercício na aula

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$.

- Mostre que $u = (-2, 1, 0, 1) \in \mathcal{N}(A) \subset \mathbb{R}^4$.

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0} \text{ e portanto } u \in \mathcal{N}(A)$$

- Mostre que $b = (1, -1, 5) \in \mathcal{C}(A) \subset \mathbb{R}^3$.

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|b']$$

é possível e portanto $b \in \mathcal{C}(A)$.

# Inclusão entre espaços gerados por vetores

## Proposição

Sejam $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^m$, $U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ e $V$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então

$$U \subset V \quad \Leftrightarrow \quad u_i \in V,\ i = 1, \ldots, k.$$

Em particular,

- Se $V = \mathcal{N}(A)$, então

$$\begin{aligned} U \subset V \quad &\Leftrightarrow \quad u_i \in \mathcal{N}(A),\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow \quad A\, u_i = \vec{0},\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow \quad A[\, u_1\ u_2\ \cdots\ u_k\,] = [0]_{m \times k} \end{aligned}$$

- Se $V = \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \ldots, v_n \rangle$, então

$$\begin{aligned} U \subset V \quad &\Leftrightarrow \quad u_i \in \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \ldots, v_n \rangle,\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow \quad [\, A \mid u_i\,] \text{ é possível},\ i = 1, \ldots, k \\ &\Leftrightarrow \quad [\, v_1\ \cdots\ v_n \mid u_1],\ \ldots,\ [\, v_1\ \cdots\ v_n \mid u_k\,] \text{ todos possíveis} \\ &\Leftrightarrow \quad [\, v_1\ \cdots\ v_n \mid u_1\ \cdots\ u_k\,] \quad \text{possível} \end{aligned}$$



# Igualdade entre espaços gerados por vetores

## Exercício na aula

Considere $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $V = \langle v_1, v_2 \rangle$, em que $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 1)$ e $v_2 = (0, -1, 3)$. Mostre que $U = V$.

- Primeira abordagem: provar as inclusões $U \subset V$ e $V \subset U$.
  - Para mostrar que $U \subset V$, isto é, que $\langle u_1, u_2 \rangle \subset \langle v_1, v_2 \rangle$, vamos provar que $[\, v_1\ v_2 \mid u_1\ u_2\,]$ é possível. De facto,

$$[v_1\ v_2 | u_1\ u_2] = \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  - Analogamente se mostra que $V \subset U$, provando que $[\, u_1\ u_2 \mid v_1\ v_2\,]$ é possível, o que fica como exercício.
- Segunda abordagem: mostrar que $U \subset V$ (já vimos) e que $\dim U = \dim V$.
  - Vejamos que $\dim U = \dim V$: tem-se $U = \langle u_1, u_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$ com $A = [\, u_1\ u_2\,]$. Logo $\dim U = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{car}(A) = 2$ (verifique). Analogamente, $\dim V = \dim \mathcal{C}(B) = \operatorname{car}(B) = 2$, com $B = [\, v_1\ v_2\,]$.

    Alternativamente, $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ com $\{u_1, u_2\}$ linearmente independente (vetores não colineares), logo $\{u_1, u_2\}$ é base de $U$ e portanto $\dim U = 2$ porque é o número de vetores da base (e analogamente para $V$).

## Consequências da dimensão (cont.)

- Vimos anteriormente que as bases de $\mathbb{R}^n$ são os conjuntos linearmente independententes formados por $n$ vetores de $\mathbb{R}^n$.
- Temos uma caracterização análoga para qualquer subespaço vetorial $V$ cuja dimensão se conhece.

### Teorema

As bases de um subespaço vetorial $V$ de dimensão $k$ são os conjuntos linearmente independentes formados por $k$ vetores de $V$.

Nos exercícios podemos aplicar este resultado usando uma formulação um pouco distinta:

### Observação

Sejam $V$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$. Te-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é base de $V$ se verificar as seguintes condições:

- $v_1, \ldots, v_k \in V$.
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.
- $\dim V = k$.



## Consequências da dimensão (exercício)

### Exercício na aula

Considere $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Mostre que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

Temos que ver que:

- $v_1, v_2 \in \mathcal{N}(A)$. De facto, $Av_1 = \vec{0}$ e $Av_2 = \vec{0}$ (verifique!).
- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. De facto, $v_1$ e $v_2$ são não colineares.
- $\dim \mathcal{N}(A) = 2$. De facto, a matriz em escada $A'$ obtida a partir de $A$ tem duas colunas sem pivot (verifique!)

Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.