Ortogonalidade entre vetores

- Dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^m$ dizem-se *ortogonais* ($u \perp v$) se $u \cdot v = 0$, ou equivalentemente, usando a notação matricial, $u^T v = 0$.
- Por exemplo, os vetores $u = (-4, 1, 2, 1) = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

  $v = (1, 1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são ortogonais pois

$$u \cdot v = u^T v = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 + 1 + 2 + 1 = 0.$$

Ortogonalidade entre um vetor e um subespaço vetorial

Definição de vetor ortogonal a um subespaço vetorial

Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ e V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.
Diz-se que u é *ortogonal* a V, e denota-se $u \perp V$, se $u \perp v$, $\forall v \in V$, isto é, se $u \cdot v = 0$, $\forall v \in V$

Por outras palavras, u é ortogonal ao subespaço vetorial V se for ortogonal a todos os vetores de V.

Vejamos um exemplo:

- Consideremos o plano $V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$. Tem-se,
  $$V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 2, 3) = 0\},$$
  o que mostra os vetores de V são os vetores $\mathbb{R}^3$ que são ortogonais a $(1, 2, 3)$ e portanto $(1, 2, 3) \perp V$.
- Este resultado pode ser generalizado para qualquer plano que passe na origem, $V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$. De facto,
  $$V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon (x_1, x_2, x_3) \cdot (a, b, c) = 0\},$$
  tendo-se $(a, b, c) \perp V$, razão pela qual o vetor dos coeficientes (a, b, c) é designado por vetor normal ao plano V.

Vetor ortogonal a um subespaço dado por geradores

Proposição

Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ e $V = \langle v_1 \ldots, v_n \rangle$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Tem-se,

$$u \perp V \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \perp v_1, \\ \vdots \\ u \perp v_n. \end{cases}$$

Por outras palavras, para mostrar que $u \perp V$ basta mostrar que u é ortogonal a um conjunto de geradores de V (ou, em particular, a uma base de V).

Demonstração

- Se $u \perp V$ então $u \perp v$, $\forall v \in V$, e em particular, $u \perp v_1, \ldots, u \perp v_n$
- Reciprocamente suponhamos que $u \perp v_1, \ldots, u \perp v_n$ e seja $b \in V$. Como $V = \langle v_1 \ldots, v_n \rangle$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ e tem-se

$$\begin{aligned} u \cdot b &= u \cdot (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = u \cdot (\alpha_1 v_1) + \cdots + u \cdot (\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 (\underbrace{u \cdot v_1}_{=0}) + \cdots + \alpha_n (\underbrace{u \cdot v_n}_{=0}) = 0 \end{aligned}$$

Logo $u \perp b$, $\forall b \in V$ e portanto $u \perp V$.

Exemplo na aula

Sejam $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2)$, $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $b = (1, -1, -1)$. Tem-se:

- $b \perp v_1$ pois $v_1 \cdot b = v_1^T b = [\,1 \ \ 2 \ \ -1\,] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$
- $b \perp v_2$ pois $v_2 \cdot b = v_2^T b = [\,2 \ \ 0 \ \ 2\,] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$

Como $b \perp v_1$ e $b \perp v_2$, conclui-se pelo resultado do slide anterior que $b \perp V = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Complemento ortogonal de um subespaço vetorial

Definição de complemento ortogonal

Seja V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Chama-se *complemento ortogonal* de V e denota-se por $V^\perp$, ao conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^m$ que são ortogonais a V, isto é,

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^m \ : \ u \perp V\}$$

- Note-se que por definição de complemento ortogonal, tem-se

$$\boxed{u \perp V \Leftrightarrow u \in V^\perp}$$

- Vejamos como determinar o complemento ortogonal num exemplo, que nos irá sugerir também um método geral para calcular complementos ortogonais de subespaços vetoriais arbitrários.

Exemplo

Consideremos novamente os vetores $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2)$ e seja $A = [\, v_1 \ \ v_2 \,]$. Vamos determinar $\mathcal{C}(A)^\perp = \langle v_1, v_2\rangle^\perp$.
Dado $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ tem-se:

$$b \perp \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 \cdot b = 0 \\ v_2 \cdot b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1^T b = 0 \\ \\ v_2^T b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \\ \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T b = \vec{0}.$$

Obtivemos portanto a seguinte relação,

$$b \perp \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2\rangle \Leftrightarrow A^T b = \vec{0} \Leftrightarrow b \in \mathcal{N}(A^T).$$

Logo,

$$\mathcal{C}(A)^\perp = \{b \in \mathbb{R}^3 \ : \ b \perp \mathcal{C}(A)\} = \{b \in \mathbb{R}^3 \ : \ A^T b = \vec{0}\} = \mathcal{N}(A^T)$$

Exemplo (cont.)

Calculando $\mathcal{N}(A^T)$ obtém-se (confirme!),

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A^T) &= \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x_1=-x_3,\ x_2=x_3,\ x_3\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(-x_3,x_3,,x_3) \,:\, x_3\in\mathbb{R}\} = \langle(-1,1,1)\rangle.\end{aligned}$$

Note-se que,

$$\mathcal{C}(A)=\big\{b : [\,A\,|\,b\,] \text{ é possível}\big\} = \big\{(b_1,b_2,b_3) \,:\, -b_1+b_2+b_3=0\big\},$$

como se pode verificar aplicando a fase descendente à matriz $[\,A\,|\,b\,]$:

$$[\,A\,|\,b\,]=\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & b_1\\ 2 & 0 & b_2\\ -1 & 2 & b_3\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & b_1\\ 0 & -4 & b_2-2b_1\\ 0 & 0 & b_3+b_2-b_1\end{array}\right].$$

Constata-se assim que $\mathcal{C}(A)=\langle v_1,v_2\rangle$ é o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com equação cartesiana $-x_1+x_2+x_3=0$, sendo que o complemento ortogonal deste plano, $\mathcal{C}(A)^\perp=\mathcal{N}(A^T)=\langle(-1,1,1)\rangle$, define a reta que passa na origem, perpendicular ao plano $\mathcal{C}(A)$, uma vez que tem a direção $(-1,1,1)$ do vetor normal ao plano $-x_1+x_2+x_3=0$.

Note-se ainda que $\dim\mathcal{C}(A)+\dim\mathcal{C}(A)^\perp=2+1=3=\dim\mathbb{R}^3$.

Uma relação fundamental

As relações estabelecidas no slide 115 podem ser generalizadas para o espaço das colunas de uma matriz arbitrária A. Mais precisamente, tem-se o seguinte:

- Dados $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^m$, $A=[\,v_1\ \ \cdots\ \ v_n\,]$ e $b\in\mathbb{R}^m$ tem-se,

$$b\perp\mathcal{C}(A)=\langle v_1,\ldots,v_n\rangle \;\Leftrightarrow\; A^Tb=\vec{0} \;\Leftrightarrow\; b\in\mathcal{N}(A^T),$$

donde resulta a relação fundamental:

Complemento ortogonal do espaço de colunas/ espaço gerado

Se $A=[\,v_1\ \ \cdots\ \ v_n\,]$ então

$$\boxed{\mathcal{C}(A)^\perp=\big\langle v_1,\ldots,v_n\big\rangle^\perp=\mathcal{N}(A^T).}$$

O complemento ortogonal é um subespaço vetorial

- Uma vez que qualquer subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^m$ admite uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$, podemos escrever,

$$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$$

com $A = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]_{m \times n}$ é a matriz da base, tendo-se

$$V^\perp = \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T).$$

Logo o complemento ortogonal de um subespaço V de $\mathbb{R}^m$ é também um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, uma vez que pode ser definido como o espaço nulo de uma matriz do tipo $n \times m$

- Por outro lado usando a relação $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A^T)$, obtém-se,

$$\begin{aligned} \dim V^\perp &= \dim \mathcal{C}(A)^\perp = \dim \mathcal{N}(A^T) \\ &= m - \operatorname{car}(A^T) = m - \operatorname{car}(A) = m - \dim V, \end{aligned}$$

atendendo a que m é o número de colunas de A^T.

Propriedades do complemento ortogonal

Teorema

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então

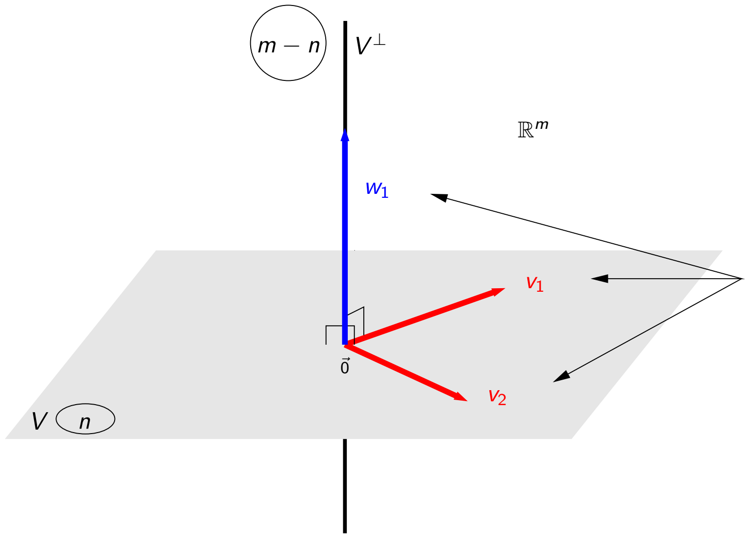
- $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$
- $\dim V + \dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^m = m$
- $(V^\perp)^\perp = V$
- Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V e $\{w_1, \dots, w_{m-n}\}$ é base de $V^\perp$, então

$$\{\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{base de } V}, \underbrace{w_1, \dots, w_{m-n}}_{\text{base de } V^\perp}\} \quad \text{é base de } \mathbb{R}^m$$

Note-se que a relação $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$ significa que o vetor nulo é único vetor que é ortogonal a si próprio.

A relação $(V^\perp)^\perp = V$ implica que se $W = V^\perp$ então $W^\perp = V$.

Ilustração das propriedades do complemento ortogonal



Neste exemplo:

base de $\mathbb{R}^m$: $\{v_1, v_2, w_1\}$

$\dim \mathbb{R}^m = m = 3$

$\dim V = n = 2$ (V plano)

$\dim V^{\perp} = m - n = 1$ ($V^{\perp}$ reta)