Subespaços vetoriais e respetivos complementos algébricos

Quadro-resumo do complemento ortogonal de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$\dim V + \dim V^\perp$	V	$V^\perp$
0+2	$\{\vec{0}\}$	$\mathbb{R}^2$
1+1	reta que passa na origem	reta perpendicular que passa na origem
2+0	$\mathbb{R}^2$	$\{\vec{0}\}$
0+3	$\{\vec{0}\}$	$\mathbb{R}^3$
1+2	reta que passa na origem	plano perpendicular que passa na origem
2+1	plano que passa na origem	reta perpendicular que passa na origem
3+0	$\mathbb{R}^3$	$\{\vec{0}\}$

Observação

Em geral, tem-se para qualquer $m \geq 2$:

- $\dim(\mathbb{R}^m)^\perp = m - \dim \mathbb{R}^m = 0$ e portanto $(\mathbb{R}^m)^\perp = \{\vec{0}\}$.
- $\dim\{\vec{0}\}^\perp = m - \dim\{\vec{0}\} = m$ e portanto $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^m$.

Tem-se portanto que
- subespaço maximal$^\perp$ = subespaço minimal
- subespaço minimal$^\perp$ = subespaço maximal

Caso dos subespaços vetoriais dados por equações

- Vimos no slide slide 119 que se $W = V^\perp$ então $W^\perp = V$. Logo, como $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{C}(A)^\perp$, conclui-se que $\mathcal{N}(A^T)^\perp = \mathcal{C}(A)$. Substituindo na relação anterior A^T por B tem-se $A = (A^T)^T = B^T$, obtendo-se $\mathcal{N}(B)^\perp = \mathcal{C}(B^T)$ (e podemos substituir, obviamente, B por $A\ldots$)

  Têm-se portanto as duas fórmulas abaixo que permitem calcular o complemento ortogonal de um subespaço vetorial dado por geradores, $V = \mathcal{C}(A)$ e / ou de um subespaço vetorial definido por um sistema de equações homogéneas, $V = \mathcal{N}(A)$:

Complemento ortogonal de subespaços definidos por matrizes

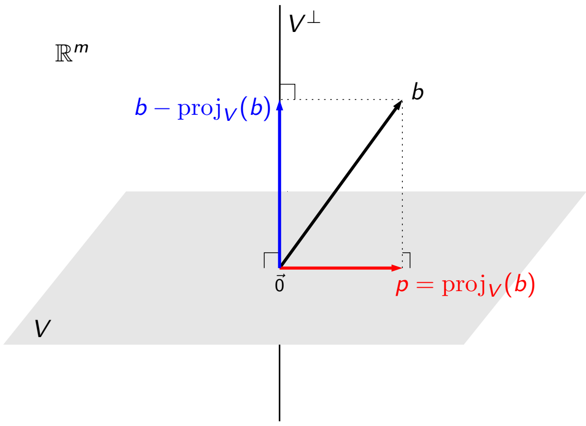
V	$V^\perp$
$\mathcal{C}(A)$	$\mathcal{N}(A^T)$
$\mathcal{N}(A)$	$\mathcal{C}(A^T)$

O complemento ortogonal do espaço das colunas [resp. espaço nulo] de uma matriz é o espaço nulo [resp. espaço das colunas] dessa matriz transposta.

Conceito de projeção ortogonal

Teorema-definição

- Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ existe um e um só $p \in V$ tal que $b - p \in V^{\perp}$, isto é, tal que $b - p \perp V$.
- O vetor p é designado por *projeção ortogonal de b sobre V* e denota-se por $\text{proj}_V(b)$.



Conceito de projeção ortogonal

A definição anterior significa que o vetor $p = \text{proj}_V(b)$ é caracterizado por duas propriedades:

- $p \in V$ $\rightarrow$ projecta b sobre o subespaço vetorial V.
- $(b - p) \perp V$ $\rightarrow$ a direção da projeção é perpendicular a V.

Exercício na aula

Sejam $b = (-1, 1, 3)$, $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ e $V = \langle v_1, v_2 \rangle$. Mostre que $\text{proj}_V(b) = (0, 2, 2)$.

Resolução: por definição é necessário mostrar que $p = (0, 2, 2)$ verifica as seguintes 2 condições:

- $p \in V$.
- $(b - p) \perp V$, isto é, $(b - p) \in V^{\perp}$.

Exercício na aula (cont.)

Tem-se:

- $p = (0,2,2) \in V = \langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, onde $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$, se e só se $Ax = p$ for possível. Ora,

$$[\, A \mid p \,] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Como o sistema $Ax = p$ é possível, $p = (0,2,2) \in V$.

- $b - p = (-1,1,3) - (0,2,2) = (-1,-1,1) \in V^{\perp} = \mathcal{C}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^T)$ se e só se $A^T(b-p) = \vec{0}$. De facto,

$$A^T(b-p) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

  Logo $(b-p) \in V^{\perp}$ (alternativamente pode-se mostrar que $b - p$ é ortogonal aos geradores de V, i.e., $(b-p) \cdot v_1 = (b-p) \cdot v_2 = 0$).

Uma vez que as duas condições são verificadas, $p = \mathrm{proj}_V(b)$.

Casos triviais: projeção ortogonal sobre os subespaços maximal e minimal

A projeção ortogonal sobre o subespaço maximal $\mathbb{R}^m$ ou sobre o subespaço minimal $\{\vec{0}\}$ decorre imediatamente por definição:

- $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^m}(b) = b$ para todo o $b \in \mathbb{R}^m$.

  De facto,
  - $p = b \in \mathbb{R}^m$.
  - $b - p = b - b = \vec{0} \in (\mathbb{R}^m)^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

- $\mathrm{proj}_{\{\vec{0}\}}(b) = \vec{0}$ para todo o $b \in \mathbb{R}^m$.

  De facto,
  - $p = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$.
  - $b - \vec{0} = b \in \{\vec{0}\}^{\perp} = \mathbb{R}^m$.

E sobre outros subespaços vetoriais ?

O caso não trivial mais simples corresponde a calcular a projeção ortogonal sobre um subespaço vetorial de dimensão um, isto é, sobre uma reta que passa na origem.

Interlúdio sobre o produto escalar de vetores

Propriedades do produto escalar

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

- $x \cdot y = y \cdot x$
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$
- $x \cdot x = \|x\|^2 \geq 0$ (voltaremos mais tarde a esta propriedade!)
- $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

As 3 primeiras propriedades significam que o produto escalar se "comporta" como um produto de números reais. Por exemplo, são válidos os casos notáveis da multiplicação (com as devidas adaptações):

- $(x+y) \cdot (x+y) = x \cdot x + 2\, x \cdot y + y \cdot y$
- $(x-y) \cdot (x-y) = x \cdot x - 2\, x \cdot y + y \cdot y$
- $(x+y) \cdot (x-y) = x \cdot x - y \cdot y$

Projeção ortogonal sobre uma reta

Sejam $V = \langle v \rangle$ com $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq \vec{0}$, um subespaço vetorial de dimensão um (reta), $b \in \mathbb{R}^m$ e $p = \mathrm{proj}_V(b)$. Por definição de projeção ortogonal,

- $p \in V = \langle v \rangle$. Logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p = \alpha v$ e portanto

  $$b \cdot v = (p + (b-p)) \cdot v = (\alpha v + (b-p)) \cdot v = \alpha(v \cdot v) + (b-p) \cdot v.$$

- $(b-p) \in V^{\perp}$. Como $v \in V$, obtém-se $(b-p) \cdot v = 0$. Logo $b \cdot v = \alpha(v \cdot v)$, isto é, $\alpha = \dfrac{b \cdot v}{v \cdot v}$. Logo $p = \alpha v = \dfrac{b \cdot v}{v \cdot v} v$.

Obtivemos portanto o seguinte resultado.

Fórmula da projeção ortogonal sobre uma reta

Seja $V = \langle v \rangle$ com $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$ tem-se

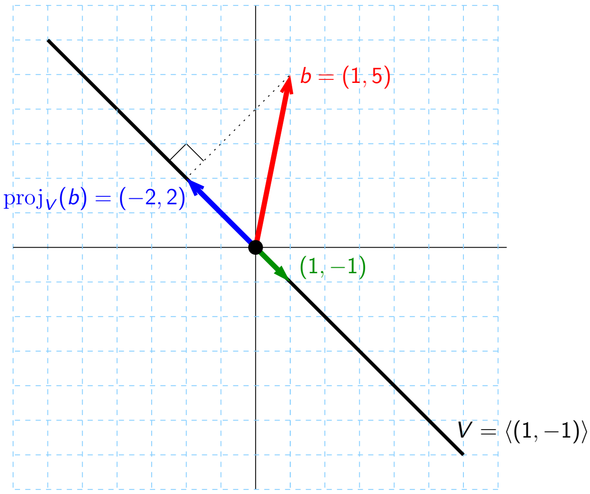
$$\boxed{\mathrm{proj}_V(b) = \mathrm{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{v \cdot b}{v \cdot v} v}$$

Note-se que a projeção não depende da escolha do gerador v da reta V.

Projeção ortogonal sobre uma reta - exemplo

Sejam $b = (1,5)$ e $V = \{(x_1, x_2) \,:\, x_1 = -x_2\}$ V a bissectriz dos quadrantes pares. Então V é uma reta que passa na origem com vetor director $(1,-1)$ (por exemplo), tendo-se $V = \langle (1,-1) \rangle$. Logo,

$$\text{proj}_V(b) = \text{proj}_{\langle (1,-1)\rangle}(b) = \frac{(1,-1)\cdot(1,5)}{(1,-1)\cdot(1,-1)}(1,-1) = (-2,2).$$



Projeção ortogonal sobre um vetor

Fórmula da projeção ortogonal sobre um vetor

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Dado $b \in \mathbb{R}^m$ define-se a *projeção ortogonal de b sobre o vetor v*, denotada $\text{proj}_v(b)$, como sendo a projeção de b sobre a reta definida por v, isto é,

$$\text{proj}_v(b) = \text{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{v\cdot b}{v \cdot v} v$$

Voltando ao exemplo do slide anterior, tem-se

$$\begin{aligned}\text{proj}_{(-4,4)}(1,5) &= \text{proj}_{\langle(-4,4)\rangle}(1,5) = \frac{(-4,4)\cdot(1,5)}{(-4,4)\cdot(-4,4)}(-4,4)\\ &= \frac{1}{2}(-4,4) = (-2,2).\end{aligned}$$

Uma decomposição fundamental

Observação

Se $p = \text{proj}_V(b)$ tem-se por definição:

- $p \in V$
- $b - p \in V^{\perp}$

Logo $b - p = \text{proj}_{V^{\perp}}(b)$. De facto,

- $q = b - p \in V^{\perp}$
- $b - q = b - (b - p) = p \in V = (V^{\perp})^{\perp}$

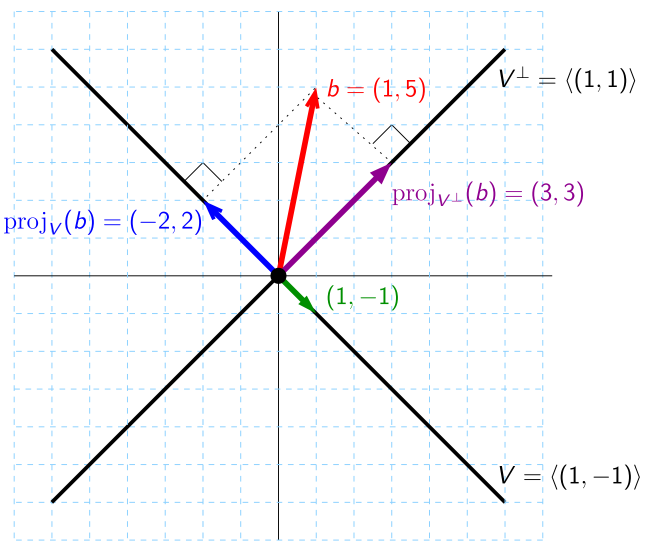
Como $b = p + (b - p)$ obtivemos a seguinte decomposição (única) de b segundo V e $V^{\perp}$:

$$\boxed{b = \text{proj}_V(b) + \text{proj}_{V^{\perp}}(b)}$$

Exemplo do slide 129 revisitado

Considerando novamente $V = \langle (1, -1) \rangle$ e $b = (1, 5)$, obtém-se a decomposição descrita no slide anterior,

$$b = (1, 5) = \text{proj}_V(b) + \text{proj}_{V^{\perp}}(b) = (-2, 2) + (3, 3).$$



TPC: verifique que $V^{\perp} = \langle (1, 1) \rangle$.

Aplicação: projeção sobre um espaço de codimensão um

Seja V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ de codimensão um, isto é, $\dim V = m - 1$. Nessa altura $\dim V^\perp = m - \dim V = 1$ e logo existe $w \neq \vec{0}$ tal que $V^\perp = \langle w \rangle$ é uma reta com vetor diretor w, tendo-se pela decomposição do slide 131 e pela fórmula da projeção sobre uma reta,

$$\boxed{\operatorname{proj}_V(b) = b - \operatorname{proj}_{V^\perp}(b) = b - \frac{w \cdot b}{w \cdot w} w}$$

Vejamos um exemplo.

- Consideremos $b = (1, 1, 1)$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
- Tem-se $V = \mathcal{N}(A)$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Pela relação do slide 122,

$$V^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A^T) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \langle (1, 2, 3) \rangle.$$

- Logo $V^\perp$ é uma reta com vetor diretor $w = (1, 2, 3)$ e tem-se

$$\operatorname{proj}_{V^\perp}(b) = \operatorname{proj}_{\langle (1,2,3) \rangle}((1, 1, 1)) = \frac{(1, 2, 3) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3)}(1, 2, 3) = \frac{3}{7}(1, 2, 3),$$

e portanto

$$\operatorname{proj}_V(b) = b - proj_{V^\perp}(b) = (1, 1, 1) - \frac{3}{7}(1, 2, 3) = \frac{1}{7}(4, 1, -2).$$