

# INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2º teste de Álgebra Linear

8 de janeiro de 2024 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrônicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número:

Nome:

---

[7v] 1. Considere  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $u = (1, 0, 1, 1)$  e  $b = (1, 4, -1, -3)$ .

- (a) Justifique que  $u \perp \mathcal{C}(A)$ .
- (b) Indique uma base e a dimensão de  $\mathcal{C}(A)$ .
- (c) Calcule a  $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$  e indique distância de  $b$  a  $\mathcal{C}(A)$ .
- (d) Determine  $c \in \mathbb{R}^4$  com  $c \neq b$  tal que  $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$  e  $d(c, \mathcal{C}(A)) > 0$ .

[7v] 2. Considere  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- (a) Determine os valores de  $\alpha$  para os quais:
  - i. 0 é valor próprio de  $A$ .
  - ii.  $\det(2A^{-1}) = 1$ .

**No que se segue considere  $\alpha = 0$ .**

- (b) Determine os valores próprios de  $A$  e indique as respetivas multiplicidades algébricas.
- (c) Indique um vetor próprio de  $A$  e o respetivo valor próprio.
- (d) Averigue se existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  seja uma matriz diagonal.

- [1.25v] 3. Uma empresa agro-alimentar produz três alimentos, A, B e C. Cada quilograma de A, B e C requer, respetivamente, 2 kg, 3 kg e 4 kg de matéria-prima e a empresa pode utilizar até 1 t de matéria-prima. A procura total dos 3 alimentos é não inferior a 200 kg. A produção de alimento A não deve exceder metade da produção dos restantes 2 alimentos. A capacidade máxima de produção da empresa de alimento C é de 100 kg. Cada quilograma de alimento A, B e C gera uma receita de 5 €, 4 € e 6 €, respetivamente. A empresa pretende determinar o plano de produção que maximiza a receita. Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

[4.75v] 4. Considere o seguinte problema de programação linear,

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Escreva o problema na forma *standard*.
- (b) Justifique que a solução  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$  e  $x_3 = 2$  é admissível e averigue se corresponde a um vértice da região admissível.
- (c) Determine uma solução ótima do problema quando  $x_3 = 0$ . Será solução ótima do problema inicial?

Cotação (não preencher)

1a)	1b)	1c)	1d)	2a)i	2a)ii	2b)	2c)	2d)	3)	4a)	4b)	4c)	Total
1	1.25	2.75	2	1	1.5	2.25	1.25	1	1.25	0.75	2	2	20