INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

8 de janeiro de 2024 - Duração: 2h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[7.5v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \; u_2 \; u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) A é invertível.

ii) $b \notin \mathcal{C}(A)$.

iii) $(0, -2, -1)$ é solução de $Ax = b$.

c) Considere $\alpha = -1$ e $\beta = -5$ e escreva b como combinação linear de u_1, u_2, u_3.

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = 3$.

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

e) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.

[4v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $u = (1, 0, 1, 1)$ e $b = (1, 4, -1, -3)$.

a) Justifique que $u \perp \mathcal{C}(A)$.

b) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

c) Calcule a $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e indique distância de b a $\mathcal{C}(A)$.

[3.5v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

b) Indique um vetor próprio de A e o respetivo valor próprio.

c) Averigue se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

[1v] **4.** Uma empresa agro-alimentar produz três alimentos, A, B e C. Cada quilograma de A, B e C requer, respetivamente, 2 kg, 3 kg e 4 kg de matéria-prima e a empresa pode utilizar até 1 t de matéria-prima. A procura total dos 3 alimentos é não inferior a 200 kg. A produção de alimento A não deve exceder metade da produção dos restantes 2 alimentos. A capacidade máxima de produção da empresa de alimento C é de 100 kg. Cada quilograma de alimento A, B e C gera uma receita de 5 €, 4 € e 6 €, respetivamente. A empresa pretende determinar o plano de produção que maximiza a receita. Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

[2v] **5.** Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & z = x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & \\ \text{s.a} & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & \leq 24 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq 6 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq 0. \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

b) Justifique que a solução $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 2$ é admissível e averigue se corresponde a um vértice da região admissível.

[2v] **6.** Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que A^2 é a matriz nula. Prove que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{N}(A)$.

Cotação (não preencher)

1a)	1b)i	1b)ii	1b)iii	1c)	1d)	1e)	2a)	2b)	2c)	3a)	3b)	3c)	4)	5a)	5b)	6	Total
1.75	0.5	0.5	0.75	1	1.5	1.5	0.75	1	2.25	1.75	1	0.75	1	0.5	1.5	2	20