INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2º teste de Álgebra Linear

8 de janeiro de 2024 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[7v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $u = (1,0,1,1)$ e $b = (1,4,-1,-3)$.

(a) Justifique que $u \perp \mathcal{C}(A)$.

(b) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

Uma possível base de $\mathcal{C}(A)$ é $\{(1,2,0,-1),(0,1,1,-1)\}$ e a dimensão é 2 (número de vetores da base).

(c) Calcule a $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e indique distância de b a $\mathcal{C}(A)$.

$\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) = (2,4,0,-2)$ e $d(b,\mathcal{C}(A)) = \|b - \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)\| = \sqrt{3}$.

(d) Determine $c \in \mathbb{R}^4$ com $c \neq b$ tal que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e $d(c,\mathcal{C}(A)) > 0$.

Uma vez que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) \in \mathcal{C}(A)$ e que por (a) $u = (1,0,1,1) \in \mathcal{C}(A)^\perp$ um possível vetor é

$$\begin{aligned} c &= \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) + \text{proj}_{\mathcal{C}(A)^\perp}(c) \\ &= \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) + u \\ &= (2,4,0,-2) + (1,0,1,1) = (3,4,1,-1) \neq b. \end{aligned}$$

Note-se que $d(c,\mathcal{C}(A)) = \|c - \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c)\| = \|u\| = \sqrt{3} > 0$.

[7v] 2. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determine os valores de α para os quais:

i. 0 é valor próprio de A.

$\alpha = -\dfrac{1}{2}$

ii. $\det(2A^{-1}) = 1$.

$\alpha = \dfrac{3}{2}$

No que se segue considere $\alpha = 0$.

(b) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

Os valores próprios (distintos) de A são 1 e 2, tendo-se m.a.(1) = 2 e m.a.(2) = 1.

(c) Indique um vetor próprio de A e o respetivo valor próprio.

Por exemplo, o vetor próprio $(-1,-1,1) \in E(1)$, associado ao valor próprio 1.

(d) Averigue se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

A questão é equivalente a saber se A é diagonalizável, o que é equivalente a saber se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores próprios de A. Uma vez que $m.a.(1) = 2 > m.g.(1) = 1$ (verifique), não existe tal base e portanto também não existe a matriz P nas condições do enunciado.

[1.25v] 3. Uma empresa agro-alimentar produz três alimentos, A, B e C. Cada quilograma de A, B e C requer, respetivamente, 2 kg, 3 kg e 4 kg de matéria-prima e a empresa pode utilizar até 1 t de matéria-prima. A procura total dos 3 alimentos é não inferior a 200 kg. A produção de alimento A não deve exceder metade da produção dos restantes 2 alimentos. A capacidade máxima de produção da empresa de alimento C é de 100 kg. Cada quilograma de alimento A, B e C gera uma receita de 5 €, 4 € e 6 €, respetivamente. A empresa pretende determinar o plano de produção que maximiza a receita. Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_A + 4x_B + 6x_C \\ \text{s.a} & 2x_A + 3x_B + 4x_C \leq 1000 \\ & x_A + x_B + x_C \geq 200 \\ & x_A \leq \frac{1}{2}(x_B + x_C) \\ & x_C \leq 100 \\ & x_A, x_B, x_C \geq 0 \end{array}$$

onde x_A, x_b, x_C denotam as quantidades (em kg) de alimento A, B e C a produzir, respectivamente.

[4.75v] 4. Considere o seguinte problema de programação linear,

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0. \end{array}$$

(a) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + f_1 = 24 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + f_2 = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - f_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3 \geq 0. \end{array}$$

(b) Justifique que a solução $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 2$ é admissível e averigue se corresponde a um vértice da região admissível.

Corresponde a um vértice da região admissível.

(c) Determine uma solução ótima do problema quando $x_3 = 0$. Será solução ótima do problema inicial?

Uma solução ótima quando $x_3 = 0$ é $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, a que corresponde o valor 16 da função objectivo. Esta solução não corresponde no entanto a uma solução ótima do problema inicial uma vez que a função objetivo atinge um valor superior (igual a 22) para a solução $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 2$ da alínea (b).

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)**	**1c)**	**1d)**	**2a)i**	**2a)ii**	**2b)**	**2c)**	**2d)**	**3)**	**4a)**	**4b)**	**4c)**	**Total**
1	1.25	2.75	2	1	1.5	2.25	1.25	1	1.25	0.75	2	2	20