INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial de Álgebra Linear

7 de fevereiro de 2024 - Duração: 2h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)i**	**1b)ii**	**1b)iii**	**1b)iv**	**1c)**	**1d)i**	**1d)ii**	**1d)iii**	**1d)iv**	**2a)**	**2b)**	**2c)**	**3)**	**4a)**	**4b)**	**4c)**	**5**	**Total**
1.75	0.5	0.5	1	1	1.25	1.5	0.75	1.75	1.5	1.5	1	0.75	1	0.5	1.5	0.75	1.5	20

[11.5v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$, $b = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $B = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Seja $V = \{\, (x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_3 = 0,\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \,\}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) $b \in \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

ii) $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente.

iii) B é a inversa de A.

iv) O paralelipípedo definido por u_1, u_2, u_3 tem volume 1.

c) Determine uma base e a dimensão de V.

d) No que se segue considere $\alpha = -1$ e $\beta = 3$.

i) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

ii) Justifique que $V \subset \mathcal{C}(A)$.

iii) Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.

iv) Calcule a $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e indique a distância de b a $\mathcal{C}(A)$.

v.s.f.f.

[3.25v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

b) Dê exemplo de um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^3$ e de um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A\,v = \lambda\,v$.

c) Averigue se A é diagonalizável.

[1v] **3.** Uma associação florestal pretende rentabilizar um terreno com 500 ha plantando eucaliptos, pinheiros e carvalhos. Cada árvore de eucalipto, pinheiro e carvalho requer, respetivamente, 4 m^2, 8 m^2 e 5 m^2 de terreno. Por cada árvore de eucalipto, pinheiro e carvalho plantada prevê-se um lucro anual médio de 2 €, 1.5 € e 1 €, respetivamente. A área destinada ao eucaliptal não deve exceder 40 % da área total destinada aos outros dois tipos de árvores. A área destinada ao carvalhal não deve ser inferior a 100 ha. Pretende-se determinar a área a destinar a cada tipo de árvore de forma a maximizar o lucro anual médio.

Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

[2.75v] **4.** Considere o seguinte problema de programação linear,

$$\begin{array}{lrl} \max & z = x_1 + x_2 & + \ x_3 \\ \text{s.a} & 4x_1 + 5x_2 & + 8x_3 \leq 6 \\ & 8x_1 + 5x_2 & + 4x_3 \leq 6 \\ & x_1, \quad x_2, & \quad x_3 \geq 0. \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

b) Justifique que a solução $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = \frac{3}{4}$ corresponde a um vértice da região admissível do problema.

c) Dê exemplo de uma solução admissível que não seja vértice da região admissível do problema.

[1.5v] **5.** Duas matrizes quadradas A e B dizem-se *semelhantes* se existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre que matrizes semelhantes possuem os mesmos valores próprios.