INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

8 de janeiro de 2024 - Duração: 2h30

> Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
> O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[7.5v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \; u_2 \; u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para $\alpha \neq -1$ e 3 o sistema é PD para todo o β.

Para $\alpha = -1$ o sistema é PI para todo o β.

Para $\alpha = 3$ e $\beta \neq 3$ o sistema é IMP.

Para $\alpha = 3$ e $\beta = 3$ o sistema é PI.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) A é invertível.
$\alpha \neq -1$ e 3.

ii) $b \notin \mathcal{C}(A)$.
$\alpha = 3$ e $\beta \neq 3$.

iii) $(0, -2, -1)$ é solução de $Ax = b$.
$u = (0, -2, -1)$ é solução de $Ax = b$ se e só se $Au = b$ se e só se $\alpha = -1$ e $\beta = -5$.

c) Considere $\alpha = -1$ e $\beta = -5$ e escreva b como combinação linear de u_1, u_2, u_3.

Resolvendo o sistema (indeterminado) $\left[\, A \,|\, b \,\right]$ obtém-se $\alpha_1 = 2 + \alpha_2$ e $\alpha_3 = -1$ com $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ e portanto existem infinitas formas distintas de escrever b como CL de u_1, u_2 e u_3. Tomando $\alpha_2 = 0$ (por exemplo) obtém-se $\alpha_1 = 2$ donde resulta a CL,

$$b = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 2\, u_1 + 0\, u_2 - u_3.$$

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = 3$.

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

$\mathcal{C}(A) = \left\{ b = (b_1, b_2, b_3) \,:\, 2b_1 - b_2 + b_3 = 0 \right\}$. Geometricamente define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor normal $w = (2, -1, 1)$.

e) Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Uma possível base de $\mathbb{R}^3$ é $\left\{u_1, u_2, w\right\} = \left\{(1,3,1), (-1,1,3), (2,-1,1)\right\}$, que inclui a base $\left\{u_1, u_2\right\}$ de $\mathcal{C}(A)$.

[4v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $u = (1, 0, 1, 1)$ e $b = (1, 4, -1, -3)$.

a) Justifique que $u \perp \mathcal{C}(A)$.

b) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.

Uma possível base de $\mathcal{C}(A)$ é $\{(1, 2, 0, -1), (0, 1, 1, -1)\}$ e a dimensão é 2 (número de vetores da base).

c) Calcule a $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e indique distância de b a $\mathcal{C}(A)$.

$\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) = (2, 4, 0, -2)$ e $d(b, \mathcal{C}(A)) = \|b - \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)\| = \sqrt{3}$.

[3.5v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

Os valores próprios (distintos) de A são 1 e 2, tendo-se m.a.(1) = 2 e m.a.(2) = 1.

b) Indique um vetor próprio de A e o respetivo valor próprio.

Por exemplo, o vetor próprio $(-1, -1, 1) \in E(1)$, associado ao valor próprio 1.

c) Averigue se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

A questão é equivalente a saber se A é diagonalizável, o que é equivalente a saber se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores próprios de A. Uma vez que $m.a.(1) = 2 > m.g.(1) = 1$ (verifique), não existe tal base e portanto também não existe a matriz P nas condições do enunciado.

[1v] **4.** Uma empresa agro-alimentar produz três alimentos, A, B e C. Cada quilograma de A, B e C requer, respetivamente, 2 kg, 3 kg e 4 kg de matéria-prima e a empresa pode utilizar até 1 t de matéria-prima. A procura total dos 3 alimentos é não inferior a 200 kg. A produção de alimento A não deve exceder metade da produção dos restantes 2 alimentos. A capacidade máxima de produção da empresa de alimento C é de 100 kg. Cada quilograma de alimento A, B e C gera uma receita de 5 €, 4 € e 6 €, respetivamente. A empresa pretende determinar o plano de produção que maximiza a receita. Formule o problema em programação linear atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{lll} \max & 5x_A + 4x_B + 6x_C & \\ \text{s.a} & 2x_A + 3x_B + 4x_C & \leq 1000 \\ & x_A + x_B + x_C & \geq 200 \\ & x_A & \leq \frac{1}{2}(x_B + x_C) \\ & x_C & \leq 100 \\ & x_A, x_B, x_C \geq 0 & \end{array}$$

onde x_A, x_b, x_C denotam as quantidades (em kg) de alimento A, B e C a produzir, respectivamente.

[2v] **5.** Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{lrl} \max & z = x_1 + 4x_2 & + 5x_3 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 6x_2 & + 3x_3 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 & + 3x_3 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & + \ x_3 \geq 6 \\ & x_1, \quad x_2, & \quad x_3 \geq 0. \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + f_1 \qquad\qquad = 24 \\ & \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + f_2 \qquad = 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 \qquad\qquad - f_3 \ = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3 \geq 0. \end{array}$$

b) Justifique que a solução $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 2$ é admissível e averigue se corresponde a um vértice da região admissível.

Corresponde a um vértice da região admissível.

[2v] **6.** Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que A^2 é a matriz nula. Prove que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{N}(A)$.

Para todo o $w \in \mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b \text{ é possível}\}$ existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = w$. Daqui resulta que $Aw = A(Au) = A^2u = \vec{0}$ (uma vez que A^2 é a matriz nula) e portanto que $w \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$. Logo $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{N}(A)$.

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)i**	**1b)ii**	**1b)iii**	**1c)**	**1d)**	**1e)**	**2a)**	**2b)**	**2c)**	**3a)**	**3b)**	**3c)**	**4)**	**5a)**	**5b)**	**6**	**Total**
1.75	0.5	0.5	0.75	1	1.5	1.5	0.75	1	2.25	1.75	1	0.75	1	0.5	1.5	2	20