INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

1º teste de Álgebra Linear

30 de outubro de 2023 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[13.5v] 1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix} = [\, v_1 \ v_2 \ v_3 \,]$ e $b = (\beta, 1, -\beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 3$ o sistema é PD para todo o β.

Para $\alpha = -1$ e $\beta \neq \dfrac{1}{4}$ o sistema é IMP.

Para $\alpha = -1$ e $\beta = \dfrac{1}{4}$ o sistema é PI.

Para $\alpha = 3$ o sistema é IMP para todo o β.

(b) Indique os valores de α e β para os quais:

i. $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente.
$\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq 3$

ii. $b \notin \mathcal{C}(A)$.
$\alpha = -1$ e $\beta \neq \dfrac{1}{4}$
ou
$\alpha = 3$ e β qualquer.

iii. $\dim\langle v_1, v_2, v_3, b\rangle = 2$.
$\alpha = -1$ e $\beta = \dfrac{1}{4}$.

(c) Considere $\alpha = 0$.

i. Determine a inversa de A.
$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

ii. Utilize a inversa de A para resolver o sistema $Ax = b$ em função de β.
$$x = A^{-1}b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 3\beta \\ 1 - 3\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \beta \\ \frac{1}{3} - \beta \end{bmatrix}.$$

(d) Considere $\alpha = -1$

i. Determine $\mathcal{N}(A)$ e descreva-o geometricamente.
$\mathcal{N}(A) = \{x_3(0, -1, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (0, -1, 1)\rangle$ que define uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(0, -1, 1)$.

ii. Escreva o vetor b como combinação linear de uma base de $\mathcal{C}(A)$ para um valor conveniente de β.

Uma base para $\mathcal{C}(A)$ é $\{v_1, v_2\}$ (colunas de A que correspondem às colunas com pivot na matriz em escada A').

Resolvendo o sistema $[\, v_1 \ v_2 \mid b \,]$ conclui-se que $\beta = \dfrac{1}{4}$ para o sistema ser possível, obtendo-se $b = \dfrac{1}{2}v_1 + \dfrac{1}{4}v_2$.

iii. Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Uma possível base é $\{v_1, v_2, b\}$ com $b = (\beta, 1, -\beta)$ em que $\beta \neq \dfrac{1}{4}$, por exemplo, $b = (0, 1, 0)$.

[4.5v] 2. Considere os subespaços vetoriais $U = \big\langle (1,0,1,-2), (-1,-2,1,0), (2,1,1,-3) \big\rangle$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 + x_3,\ x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.

(a) Determine uma base e a dimensão de V.

Uma base de V é, por exemplo, $\{(-1,2,1,0), (-1,-1,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

Note-se que $V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Justifique que $U = V$.

Designando $u_1 = (1,0,1,-2)$, $u_2 = (-1,-2,1,0)$ e $u_3 = (2,1,1,-3)$ tem-se $u_1, u_2, u_3 \in V$ pois os vetores verificam as equações que definem V (verifique!). Logo $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subset V$.

Considerando $B = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$ tem-se $\dim U = \dim \big\langle u_1, u_2, u_3 \big\rangle = \dim \mathcal{C}(B) = \operatorname{car}(B) = 2$ (verifique). Como $U \subset V$ e $\dim U = \dim V = 2$, conclui-se que $U = V$.

[2v] 3. Sejam A e B matrizes quadradas da mesma ordem tais que AB é invertível com inversa C. Mostre que A e B são também invertíveis e indique as respetivas inversas.

Por definição de inversa têm-se as igualdades $(AB)C = C(AB) = I$, onde I denota a matriz identidade. Daqui resultam as igualdades $A(BC) = I$ e $(CA)B = I$, que provam que A e B são invertíveis com inversas, $A^{-1} = BC$ e $B^{-1} = CA$.

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)i**	**1b)ii**	**1b)iii**	**1c)i**	**1c)ii**	**1d)i**	**1d)ii**	**1d)iii**	**2a)**	**2b)**	**3**	**Total**
3	1	1	1	2	1	1.5	1.5	1.5	2	2.5	2	20