Hors-d'oeuvre: transformações lineares

Uma matriz $A_{m\times n}$ define de forma natural uma transformação $T = T_A$,

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & A\,x \end{array}$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, obtém-se a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix},$$

ou seja, em termos de coordenadas vem dada por,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\, x_1 - x_3).$$

Vejamos alguns casos bem conhecidos de transformações geométricas no plano e no espaço que podem ser definidas por matrizes([7]).

[7] Nem todas as transformações geométricas no plano e no espaço podem ser definidas a partir de matrizes como acima.

Transformações geométricas no plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$

Exemplos de transformações geométricas do plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$:

- Se $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha I_2$ com $\alpha > 0$ obtém-se a homotetia de razão α,

  $$H_\alpha(x) = T_{\alpha I_2}(x) = (\alpha I_2)\,x = \alpha x,$$

  isto é, em coordenadas,

  $$H_\alpha(x_1, x_2) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2),$$

  que corresponde a uma dilatação [contração] se $\alpha > 1$ [$\alpha < 1$].

- Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (matriz de permutação), obtém-se

  $$S(x) = T_A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

  isto é,

  $$S(x_1, x_2) = (x_2, x_1),$$

  que corresponde à reflexão relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Transformações geom. no plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$ (cont.)

- Se $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x) = T_A(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$R(x_1, x_2) = (-x_2, x_1),$$

que corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos (no sentido anti-horário).

- Mais geralmente, se $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, obtém-se a rotação de θ radianos (no sentido anti-horário)

$$R_\theta(x) = T_{A_\theta}(x),$$

que corresponde à rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos (no sentido anti-horário) e se deixa como exercício os alunos descreverem em termos de coordenadas.

- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se a projeção no eixo dos xx,

$$P_1(x_1, x_2) = x_1.$$

Transformações geométricas no espaço definidas por matrizes $A_{3\times 3}$

Algumas transformações geométricas do espaço definidas por matrizes $A_{3\times 3}$,

- Se $A = \alpha I_3$ com $\alpha > 0$ obtém-se a homotetia no plano de razão α:

$$H_\alpha(x) = T_{\alpha I_3}(x) = (\alpha I_3)x = \alpha x,$$

isto é, em coordenadas,

$$H_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \alpha\, x_3),$$

que corresponde uma dilatação [contração] se $\alpha > 1$ [$\alpha > 1$].

- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, obtém-se a simetria em relação ao plano xOy,

$$S(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

isto é, em coordenadas, $S_z(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$. (não foi dado na aula).

- Se $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtém-se a rotação de θ radiano em torno do eixo dos zz (no sentido direto) e que se deixa como exercício para os alunos descreverem em termos de coordenadas.

Ilustração das transformações geométricas no plano e no espaço

Definição de transformação linear e propriedades

Definição de transformação linear

Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se linear se verificar as seguintes propriedades para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ (aditividade)
- $T(\alpha\, x) = \alpha\, T(x)$ (homogeneidade)

Algumas consequências

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear então

- $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

- Mais geralmente, para todo o $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, tem-se,

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_k T(u_k).$$

Transformações lineares

Teorema (equivalência entre transf. matricial e linear)

- Toda a transformação matricial $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por uma matriz $A_{m\times n}$ é linear.
- Reciprocamente, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear então T é definida por uma matriz, mais precisamente, $T = T_A$. com

$$A = \left[\, T(e_1) \quad T(e_2) \quad \cdots \quad T(e_n) \,\right],$$

onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são as n colunas da matriz identidade.
A matriz A designa-se por matriz *standard* da transformação linear T.

A demonstração do primeiro ponto é imediata. De facto, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} T_A(x+y) &= A(x+y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y),\\ T_A(\alpha\, x) &= A(\alpha\, x) = \alpha\, Ax = \alpha\, T_A(x). \end{aligned}$$

Relativamente ao 2º ponto vamos apenas mostrar como se pode obter a matriz da transformação linear num exemplo.

Matriz de uma transformação linear - exemplo

Consideremos a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 \,,\, x_1 - x_3).$$

Vejamos como podemos obter a matriz desta transformação linear. Podemos escrever,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= T(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1))\\ &= x_1 \underbrace{T(1,0,0)}_{(1,1)} + x_2 \underbrace{T(0,1,0)}_{(1,0)} + x_3 \underbrace{T(0,0,1)}_{(1,-1)}\\ &= x_1 \begin{bmatrix} 1\\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1\\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1\\ -1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo $T(x) = Ax$, com $A = [\, T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3) \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$.

$$\begin{aligned} \text{De facto,} \quad Ax &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3\\ x_1 + 0x_2 - x_3 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 \,,\, x_1 - x_3) = T(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Composição de transformações lineares

Dadas matrizes encadeadas $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ tem-se,

$$T_A(T_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = T_{AB}(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^p$, ou seja, a composição das transformações lineares definidas pelas matrizes encadeadas $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$,

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^m,$$

é a transformação definida pelo produto $(AB)_{m\times p}$,

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{T_{AB}} \mathbb{R}^m,$$

o que permite interpretar o produto de matrizes em termos de composição de transformações lineares.

Composição de transformações lineares - exemplos

Exemplo

Mantendo as notações das transformações geométricas do plano,

$$R(x) = T_A(x), \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$S(x) = T_B(x), \quad \text{com} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto a composição de R com S vem dada por,

$$(R \circ S)(x) = T_A(T_B(x)) = T_{AB}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-x_1, x_2),$$

que corresponde à reflexão no plano relativamente ao eixo dos yy.

De facto, em coordenadas, $R(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ e $S(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Logo,

$$R(S(x_1, x_2)) = R(x_2, x_1) = (-x_1, x_2).$$

Inversa de uma transformação linear

Uma transformação linear

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

diz-se invertível se existir uma transformação

$$S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

tal que

$$T_A \circ S = S \circ T_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Nessa altura prova-se que S é também linear e tem-se, escrevendo $S = T_B$,

$$T_A \circ T_B = T_B \circ T_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = T_{I_n} \Leftrightarrow AB = BA = I_n,$$

ou seja, A é invertível com inversa B. A transformação $S = T_B$ designa-se inversa de A e denota-se T_A^{-1}. Obteve-se então o resultado.

Proposição

Uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é invertível se e só se A é invertível e nessa altura a sua inversa é $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$.

Inversa de uma transformação linear - exemplos

Exemplos

- A inversa da rotação $R_{z,\theta}$ em torno do eixo dos zz de θ radianos é a rotação $R_{z,-\theta}$ (verifique).
- Considerando $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, obtém-se

  $$T_A(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2) \qquad (\textit{verifique}).$$

  Como A é invertível com inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se

  $$T_A^{-1}(x) = T_{A^{-1}}(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix},$$

  isto é, $T_A^{-1}(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + 2x_2)$.

  De facto, $T_A(T_A^{-1}(x_1, x_2)) = \cdots \text{TPC} \cdots = (x_1, x_2)$.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

No slide 8 mencionámos as seguintes propriedades das operações, adição de vetores de $\mathbb{R}^n$ e produto de um vetor de $\mathbb{R}^n$ por um escalar, que decorrem imediatamente de propriedades análogas dos números reais.

Propriedades das operações algébricas com vetores

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

Estas 8 propriedades podem ser resumidas dizendo que $\mathbb{R}^n$ munido da adição de vetores e do produto de vetores por escalares é um *espaço vetorial*...

Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

Vamos estudar os subconjuntos não vazios $V \subset \mathbb{R}^n$ para os quais se podem adicionar vetores de V e multiplicar vetores de V por escalares sem sair de V, isto é, de modo a ainda se obterem vetores de V.

Definição de subespaço vetorial

Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um *subespaço vetorial* de $\mathbb{R}^n$ se

- $V \neq \varnothing$
- V é fechado para a adição, isto é, para todo o $u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$
- V é fechado para o produto por escalar, isto é, para todo o $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha u \in V$

Observação

É imediato verificar que se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ ainda são válidas as propriedades $(1), \ldots, (8)$ relativamente aos vetores de V, isto é, que V munido das operações adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares, herda a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Conceito de subespaço vetorial

Exercício na aula

Quais dos seguintes conjuntos $V \subset \mathbb{R}^2$ definem subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$?

- $V = \{(x, y) : xy = 0\}$ (eixos coordenados de $\mathbb{R}^2$)
- $V = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ (1^{o} quadrante de $\mathbb{R}^2$)
- $V = \{(x, y) : y = 0\}$ (eixo dos xx).

Subespaço mininal e subespaço maximal

As 3 condições da definição de subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ do slide 82 são trivialmente verificadas quando $V = \{\vec{0}\}$ e $V = \mathbb{R}^n$, obtendo-se os seguintes 2 subespaços vetoriais especiais de $\mathbb{R}^n$:

- $\{\vec{0}\}$ subespaço vetorial minimal (ou trivial).
- $\mathbb{R}^n$ subespaço vetorial maximal.

Condição **necessária** para ser subespaço vetorial...

Vamos agora estabelecer uma condição necessária (mas não suficiente) para um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definir um subespaço vetorial.

Teorema

Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ então $\vec{0} \in V$.

Demonstração: Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, tem-se:

- $V \neq \emptyset$, logo existe um vetor $v \in V$.
- V é fechado para o produto por escalar, logo $\lambda v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Considerando, em particular, $\lambda = 0$, conclui-se que $0v = \vec{0} \in V$ como se pretendia. □

Exemplo

$V = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois $(0, 0) \notin V$ $(0^2 + 0^2 \neq 1)$. O que representa geometricamente V?

Espaço nulo de uma matriz

O seguinte conceito introduz o primeiro dos subespaços vetoriais fundamentais associados a matrizes que vamos considerar.

Definição de espaço nulo de uma matriz

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se *espaço nulo de A* e denota-se por $\mathcal{N}(A)$, ao conjunto de soluções do sistema linear $Ax = \vec{0}$, isto é,

$$\mathcal{N}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = \vec{0}\right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- O espaço nulo de A corresponde ao CS do sistema linear $Ax = \vec{0}$, dito homogéneo, em que o vetor dos termos constantes é o vetor nulo.
- Um sistema homogéneo nunca é impossível uma vez que possui sempre a solução trivial $x = \vec{0}$ (pois $A\vec{0} = \vec{0}$). Em particular $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$.
- Para calcularmos $\mathcal{N}(A)$ temos que resolver o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$, isto é, temos que reduzir a matriz ampliada $\left[\, A \,|\, \vec{0} \,\right]$ ([8]).

[8] O vetor dos termos constantes pode ser omitido, uma vez que é sempre nulo ao longo do método de Gauss.

Espaço nulo - exercícios na aula

Exercícios na aula

Determine os espaços nulos das seguintes matrizes:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$.
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Reduzindo a matriz ampliada $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ do 1º sistema obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0,\ x_2 = x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(0,1,1) : x_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

- Geometricamente $\mathcal{N}(A)$ define uma reta de $\mathbb{R}^3$ (porque o sistema $Ax = \vec{0}$ possui uma variável livre), que passa na origem (porque o sistema é homogéneo) com vetor diretor $v = (0,1,1)$.

Cálculo do espaço nulo do 2º exercício

Consideremos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss obtém-se,

$$[\,A\,|\,\vec{0}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{array}\right] = [\,A' \mid \vec{0}\,].$$

  Uma vez que todas as colunas de A' têm pivot o sistema $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto possui apenas a solução trivial $x_1 = x_2 = 0$, isto é, $CS = \{(0,0)\}$.([9])
- Logo $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, $\mathcal{N}(A)$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^2$.

Critério para $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal)

$\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow Ax = \vec{0}$ é determinado $\Leftrightarrow$ car(A)=nº colunas de A.

[9] Confirme que aplicando a fase ascendente à matriz ampliada $[\,A' \mid \vec{0}\,]$ se obtém a matriz $[\,I_2\,|\,\vec{0}\,]$, com I_2 a matriz identidade de ordem 2, e portanto que a solução (única) do sistema é $x_1 = x_2 = 0$.

O espaço nulo é um subespaço vetorial...

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ então $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Temos que verificar as 3 condições da definição de subespaço vetorial do slide 82:

- $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ como vimos no slide 86.
- $\mathcal{N}(A)$ fechado para a adição: se $u, v \in \mathcal{N}(A)$ então u e v são soluções de $Ax = \vec{0}$, isto é, $Au = Av = \vec{0}$ e portanto $A(u+v) = Au + Av = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, o que significa que $u+v$ é também solução de $Ax = \vec{0}$. Logo $u + v \in \mathcal{N}(A)$.
- $\mathcal{N}(A)$ fechado para o produto por escalar fica para os alunos mostrarem... $\square$

Subespaços vetoriais definidos por CS

O CS de qualquer sistema linear homogéneo com n variáveis define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, pois corresponde ao espaço nulo da matriz dos coeficientes desse sistema (que possui n colunas).

- Por exemplo, o seguinte CS de um sistema homogéneo,

  $$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\},$$

  é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, pois $V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

O CS de um sistema linear não homogéneo nunca define um subespaço vetorial uma vez que não contém o vetor nulo (origem).

- Por exemplo, o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação não homogénea $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$,

  $$V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\},$$

  não define um subespaço vetorial porque não passa na origem.