Possíveis subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$

Mas afinal, que conjuntos definem subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$?

- Subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$):

$$\{\vec{0}\}, \quad \text{retas que passam na origem}, \quad \mathbb{R}^2.$$

- Subespaços vetoriais do espaço ($\mathbb{R}^3$):

$$\{\vec{0}\}, \quad \text{retas e planos que passam na origem}, \quad \mathbb{R}^3.$$

- Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$:

$$\{\vec{0}\}, \quad \text{retas, \ldots e hiperplanos que passam na origem}, \quad \mathbb{R}^n.$$

(um hiperplano é um conjunto definido por uma equação linear do tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, com os coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, não todos nulos.)

Combinação linear de vetores

Definição de combinação linear

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é **combinação linear** (CL) de $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ chamam-se *coeficientes* da combinação linear.

Por outras palavras, b é CL de $v_1, \ldots, v_n$ se puder ser obtido como soma de múltiplos desses vetores.

Exemplos de combinações lineares de vetores

- $(-2,-4,-2) = -2(1,2,1)$.
- $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- O vetor nulo $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ é CL de qualquer conjunto de m vetores $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{0} = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_m$$

- E cada um dos vetores v_i é CL dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$:

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & 1\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_m, \\ v_2 & = & 0\, v_1 + 1\, v_2 + \cdots + 0\, v_m, \\ & \vdots & \\ v_m & = & 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 1\, v_m. \end{array}$$

Determinação da combinação linear de vetores - exemplo

- Será que $b = (2,5,1)$ é CL de $v_1 = (2,2,1)$ e $v_2 = (2,3,1)$?
- Por outras palavras, será que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \ ?$$

Ora,

$$\begin{array}{rcl} b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Logo (α_1, α_2) é solução do sistema cuja matriz ampliada é $[\, v_1 \ \ v_2 \mid b \,]$!

Determinação da combinação linear do exemplo (concl.)

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss a $[\, v_1 \;\; v_2 \mid b \,]$, obtém-se

$$[\, v_1 \;\; v_2 \mid b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

- Como o sistema é possível podemos escrever b como CL de v_1 e v_2.
- Para determinarmos os coeficientes α_1 e α_2 da CL aplicamos a fase ascendente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & -2 \\ \alpha_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

- Assim, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -2v_1 + 3v_2$

Observação

Vimos que o vetor $u = (-2, 3)$ dos coeficientes da CL é solução do sistema com matriz ampliada $[\, v_1 \; v_2 \mid b \,]$, ou seja, da equação matricial $Ax = b$ com $A = [\, v_1 \; v_2 \,]$. Isto significa que $b = Au$ e portanto multiplicar uma matriz A por um vetor u corresponde a efetuar a CL das colunas de A com coeficientes dados pelas componentes do vetor u.

Determinação de combinações lineares

Exemplo

Considerando $c = (0, 0, 1)$ e novamente os vetores $v_1 = (2, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 3, 1)$ do exemplo do slide 95, tem-se que o sistema $Ax = c$ com $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$ é impossível (verifique). Logo c não é CL de v_1 e v_2.

Escrever b como CL de vetores $v_1, \dots, v_n$ - resumo

Consideremos $b, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e seja $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$. Tem-se:

- Se $Ax = b$ for impossível então b não é CL de $v_1, \dots, v_n$.
- Se $Ax = b$ for possível então b é CL de $v_1, \dots, v_n$, tendo-se:
  - Se $Ax = b$ é PD então b escreve-se como CL de $v_1, \dots, v_n$ de uma única forma.
  - Se $Ax = b$ for PI então b escreve-se como CL de $v_1, \dots, v_n$ de infinitas maneiras distintas.

  Cada solução $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de $Ax = b$ dá origem a uma CL $b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, que podemos escrever como $b = Au$.

Espaço gerado e espaço das colunas

Espaço gerado por vetores e espaço das colunas de uma matriz

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [\ v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n\ ]$.

- Chama-se *espaço gerado* por $v_1, \ldots, v_n$, e denota-se por $\big\langle v_1, \ldots, v_n \big\rangle$, ao subconjunto dos vetores de $\mathbb{R}^m$ que são CL de $v_1, \ldots, v_n$, isto é,

$$\begin{aligned} \big\langle v_1, \ldots, v_n \big\rangle &= \{b \in \mathbb{R}^m \ :\ b \text{ é CL de } v_1, \ldots, v_n\} \\ &= \Big\{ b \in \mathbb{R}^m :\ Ax = b \text{ é possível} \Big\} \end{aligned}$$

- Chama-se *espaço das colunas* de A, e denota-se por $\mathcal{C}(A)$, ao espaço gerado pelos vetores que constituem as n colunas de A, isto é,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \Big\{ b \in \mathbb{R}^m :\ Ax = b \text{ é possível} \Big\},$$

  que define o segundo subespaço vetorial fundamental associado a uma matriz.

Observação

$b \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) \quad \Leftrightarrow \quad b$ é CL de $v_1, \ldots, v_n \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$ é possível.

Exemplo do slide 95 revisitado

Consideremos novamente os vetores $v_1 = (2, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 3, 1)$ do slide 95 e seja $A = [\ v_1\ \ v_2\ ]$. Tem-se:

- $\big\langle v_1, v_2 \big\rangle = \mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^3 \ :\ Ax = b \text{ é possível}\}$ e obtém-se, aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_3 \end{array}\right] = [A'|b']$$

- Logo o sistema $Ax = b$ é possível sse $b_1 - 2b_3 = 0$ e portanto,

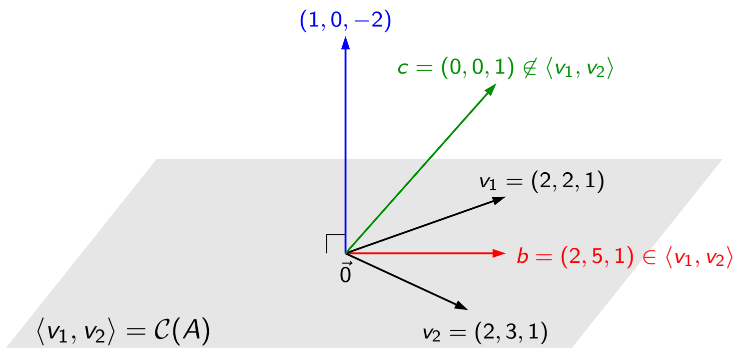
$$\big\langle v_1, v_2 \big\rangle = \mathcal{C}(A) = \big\{(b_1, b_2, b_3)\ :\ b_1 - 2b_3 = 0\big\},$$

  que define o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.

Exemplo do slide 95 revisitado - interpretação geométrica

Por exemplo,

- O vetor $b = (2, 5, 1) = -2v_1 + 3v_2$ (ver o slide 95) é CL de v_1 e v_2 e portanto pertence ao espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, o que se verifica pois satisfaz a equação $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.
- Já o vetor $c = (0, 0, 1)$ do slide 97 não é CL de v_1 e v_2 (como vimos) e portanto não pertence ao espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, como se comprova uma vez que não satisfaz a equação $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.



$x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$

Algoritmo para determinar o espaço gerado/espaço das colunas

O procedimento aplicado no exemplo do slide 99 pode ser utilizado para determinar o espaço gerado/espaço das colunas $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$, com $A = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$ arbitrário.

Algoritmo

Aplica-se a fase descendente do método de Gauss a $[A|b]$, com $b = (b_1, \ldots, b_m)$ vetor genérico. Seja $[A'|b']$ matriz em escada obtida a partir de $[A|b]$. Tem-se:

- Se A' **não possui** linhas nulas então $v_1, \ldots, v_n$ **geram** $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m.$$

- Se A' **possui** linhas nulas então $v_1, \ldots, v_n$ **não geram** $\mathbb{R}^m$ e obtém-se um sistema de equações definidoras para $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$,

$$\{(b_1, \ldots, b_m) : b'_{i_1} = b'_{i_2} = \cdots = b'_{i_k} = 0\},$$

onde $b'_{i_1}, \ldots, b'_{i_k}$ são as componentes do vetor b' associadas às linhas nulas da matriz em escada A'.

Caso do subespaço maximal $\mathbb{R}^m$

O algoritmo do slide 101 implica imediatamente o seguinte resultado.

Corolário

Sejam $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ tais que $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \mathbb{R}^m$. Então $k \geq m$.
Por outras palavras, um conjunto de vetores que gere o subespaço maximal $\mathbb{R}^m$ possui pelo menos m vetores.

Exemplos

- Tem-se $\langle (1,1,0,0), (-1,0,1,2), (4,1,1,-5) \rangle \neq \mathbb{R}^4$, pois possui menos que 4 vetores.
- Tem-se $\langle \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\} \rangle = \mathbb{R}^3$ uma vez que aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A formada pelos 4 vetores obtemos uma matriz em escada A' sem linhas nulas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A'.$$

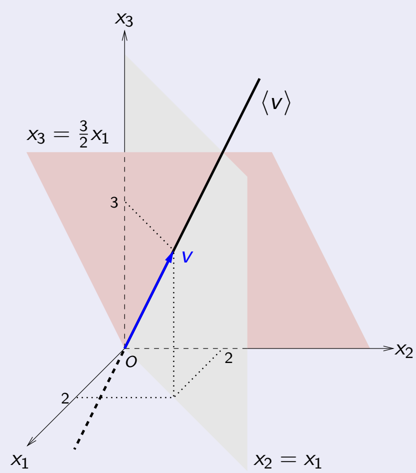
Será possível reduzir conjunto dos 4 geradores de modo a ainda obter $\mathbb{R}^3$?

Espaço gerado / espaço das colunas - exemplo

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo do slide anterior para calcular $\langle (2,2,3) \rangle$, mostre que a reta que passa na origem com vetor diretor $v = (2,2,3)$ corresponde à intersecção dos planos abaixo:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$



Conceito de (in)dependência linear

Consideremos $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$. Pelos resultados do slide 97 com $b = \vec{0}$ tem-se uma combinação linear nula,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$

se e só se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ for solução de $Ax = \vec{0}$, isto é, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A)$. Dois casos podem ocorrer:

- $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, $Ax = \vec{0}$ admite apenas a solução nula $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$, ou seja, o sistema homogéneo é determinado. Neste caso a CL com todos os coeficientes nulos, dita, combinação linear nula trivial,

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = \vec{0},$$

  é a **única** forma de escrever o vetor nulo como CL de $v_1, \ldots, v_n$ e dizemos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente (l.i.).
- $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$, isto é, $Ax = \vec{0}$ admite uma **infinidade de soluções**, ou seja, o sistema homogéneo é indeterminado. Neste caso podemos escrever o vetor nulo como CL dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ de uma infinidade de maneiras distintas e dizemos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente dependente (l.d.).

  De facto, cada solução $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A)$ dá origem a uma CL nula distinta,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$

(In)dependência linear - exemplos

- $\{(1, 3, -1)\}$ é linearmente independente. De facto, aplicando a fase descendente do método de Gauss vem

$$\left[\begin{array}{r|r} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{r|r} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

  e portanto o sistema $Ax = \vec{0}$, com A matriz definida pelo vetor $(1, 3, -1)$, é determinado.
- $\{(1, 3, -1), (0, 5, 1)\}$ é linearmente independente. De facto, aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss obtém-se,

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

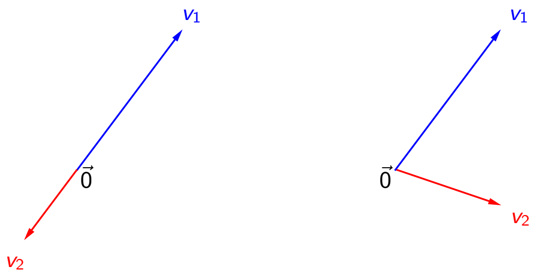
  e portanto o sistema $Ax = 0$, com A matriz definida pelos vetores $(1, 3, -1)$ e $(0, 5, -1)$, é determinado.
- Consideremos $v_1 = (1, 3, -1)$ e $v_2 = (2, 6, -2)$. Tem-se $v_2 = 2\,v_1$, donde resulta imediatamente a combinação linear nula não trivial de v_1 e v_2,

$$-2\,v_1 + v_2 = \vec{0}.$$

  Logo $\{v_1, v_2\}$ é linearmente dependente.

Independência linear de conjuntos de cardinalidade ≤ 2

- A caracterização da (in)dependência linear para conjuntos de cardinalidade inferior ou igual a dois é imediata.
  - $\{\vec{0}\}$ é linearmente dependente
  - $\{\vec{v}\}$ com $v \neq \vec{0}$ é linearmente independente
  - $\{v_1, v_2\}$ é linearmente dependente se e só se v_1 e v_2 são colineares



$\{v_1, v_2\}$ l.d. $\qquad$ $\{v_1, v_2\}$ l.i.