Notas prévias e convenções utilizadas

- Os slides de apoio às aulas teóricas baseiam-se na matéria da sebenta Texto de Apoio de Álgebra Linear, e vários dos seus esquemas e/ou figuras provêm da sebenta ou são versões modificadas de esquemas e figuras da sebenta.
- A matéria exposta nestes slides deve ser complementada com a leitura dessa sebenta.
- Vamos usualmente escrever a vermelho as definições, a azul o texto a destacar e a magenta os exercícios e desafios para os alunos.

Um pequeno exemplo para motivar :)

Um famoso conjunto de dados foi obtido por Ronald Fisher medindo o comprimento e a largura das sépalas e pétalas (em cm) de 50 lírios de cada uma das 3 espécies distintas, *Setosa*, *Versicolor* e *Virgínica*.

Autor Diego Mariano https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_dados_flor_Iris#/media/Ficheiro:Flores_de_Íris.png

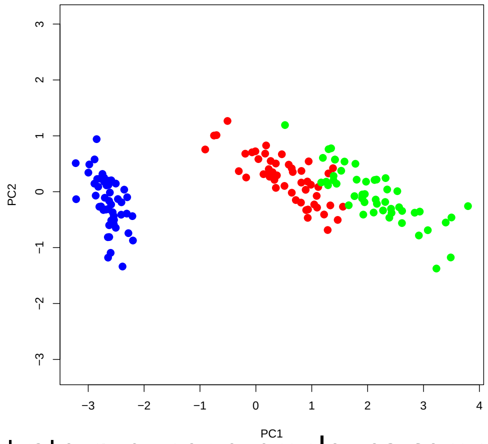
A tabela a seguir apresenta os valores obtidos para alguns dos lírios.

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	5.9	3.0	5.1	1.8	virginica

O melhor retrato do conjunto de dados dos lírios

O conjunto de dados dos 150 lírios origina uma núvem de 150 pontos num espaço a 4 dimensões que não conseguimos visualizar, em que o vetor de coordenadas de cada ponto contém o comprimento e a largura das sépalas e pétalas de cada lírio (vetor com 4 componentes).

Usando métodos de Álgebra Linear podemos projetar esta núvem de pontos num plano de modo a obter-se o melhor retrato possível (num certo sentido):



Pode-se observar no retrato que, por exemplo, os comprimentos e as larguras das sépalas e pétalas diferenciam claramente os lírios da espécie *Setosa* dos lírios das restantes 2 espécies *Versicolor* e *Virgínica*...

O conjunto $\mathbb{R}^n$

- Recordemos que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.
- O conjunto dos vetores do plano é o conjunto dos vetores com 2 componentes reais que se denota por $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

  Por exemplo, $(1, -\pi) \in \mathbb{R}^2$
- Analogamente, o conjunto dos vetores do espaço é o conjunto dos vetores com 3 componentes reais, denotado $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

  Por exemplo, $(1, -\pi, 0) \in \mathbb{R}^3$
- Vamos trabalhar com vetores com um número arbitrário de componentes reais: dado um inteiro $n \geq 2$, denotamos o conjunto dos vetores com n componentes reais por $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\Big\}$$

  x_i: componente do vetor x que se encontra na posição i
  Por exemplo, se $x = (1, -\pi, 0, 2, 3, -4) \in \mathbb{R}^6$, $x_4 = 2$

Operações sobre vetores do plano

Recordemos as operações algébricas bem conhecidas sobre vetores do plano ($\mathbb{R}^2$). Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Adição de vetores:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

- Produto de um vetor por um escalar:

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

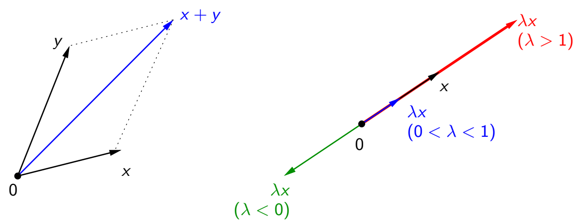
- Produto escalar (ou interno) de vetores:

$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Por exemplo, se $x = (3, 1)$, $y = (2, 5)$ e $\lambda = 2$, obtém-se

$$x + y = (5, 6), \quad 2(3, 2) = (6, 4), \quad (3, 1) \cdot (2, 5) = 11.$$

Interpretação geométrica das operações sobre vetores



(a) (b)

Recordemos que o produto escalar está relacionado com o cosseno do ângulo θ formado pelo 2 vetores pela relação bem conhecida,

$$x \cdot y = \cos(\theta)\, \|x\|\, \|y\|,$$

onde $\|x\|$ e $\|y\|$ representam os comprimentos do vetores x e y.

A extensão das operações algébricas anteriores para vetores com um número arbitrário de componentes faz-se de modo óbvio.

Operações sobre vetores de $\mathbb{R}^n$

Definição

- Adição de vetores:

$$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

isto é, somam-se as componentes homólogas dos vetores

- Produto de um vetor por um escalar:

$$\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, \lambda x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

isto é, multiplicam-se todas as componentes do vetor pelo escalar

- Produto escalar (ou interno) de vetores:

$$x \cdot y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Dar exemplos em $\mathbb{R}^4$ para as 3 operações anteriores.

Propriedades das operações sobre vetores

Adição de vetores e o produto de vetores por escalares verificam várias propriedades que decorrem imediatamente das propriedades dos números reais (falaremos mais adiante nas propriedades do produto escalar).

Propriedades das operações algébricas

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos...)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

Conceito de matriz

Os números reais serão também designados por *escalares* por oposição a vetores

Definição de matriz

Sejam m, n inteiros positivos. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ *a uma coleção $A = [a_{ij}]$ de mn números reais dispostos em m linhas e n colunas,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} .$$

a_{ij}*: elemento da matriz que se encontra na linha i e coluna j da matriz*

O índice i percorre as linhas da matriz e designa-se por índice de linha *O índice j percorre as colunas da matriz e designa-se por* índice de coluna

As matrizes constituem uma extensão dos vetores adequada ao estudo dos sistemas lineares

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$

  O elemento de A que se encontra na linha 4 e coluna 1 é $a_{41} = 5$

- $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ definida por $a_{1j} = 10$ e $a_{2j} = \pi$, para todo o j, é

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ \pi & \pi & \pi \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ definida por $a_{ij} = i + j$, para $i, j = 1, 2, 3$, é

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz-linha e matriz-coluna ou vetor

- Se $m = 1$, $A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-linha*.
  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matriz-linha do tipo 1×3.
- Se $n = 1$, $A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-coluna* ou *vetor*.
  Por exemplo, $(2, 3, -1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$
  - Em geral, $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser representado como m-uplo de números reais ou como matriz-coluna do tipo $m \times 1$:

$$x = (x_1, \cdots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Matriz definida por vetores e matriz quadrada

- Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ denota a matriz do tipo $m \times n$ cujas colunas são os n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$.
  Por exemplo, se $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 10, 0)$,

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

- Se uma matriz A é do tipo $n \times n$, A diz-se *quadrada de ordem n*.
  Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ anterior é quadrada de ordem 3.
  - Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ ao conjunto dos elementos a_{ii}, $i = 1, \dots n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz triangular e matriz diagonal

$A = [a_{ij}]$ matriz quadrada de ordem n

- A diz-se *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, ou seja, se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é triangular superior de ordem 3.

- A definição de *triangular inferior* é análoga e fica como exercício.

- A diz-se *diagonal* se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, isto é, se todos os elementos fora da diagonal principal de A forem nulos, e pode ser representada por $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

  Por exemplo, $\mathrm{diag}(2, -1, 3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 3.

Matriz escalar e matriz identidade

- Uma matriz diagonal A de ordem n diz-se *escalar* se todas as entradas da diagonal principal forem iguais entre si, isto é, se para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- Se $\lambda = 1$, A designa-se por *matriz identidade de ordem n* e denota-se por I_n (ou simplesmente por I). A matriz identidade representa o elemento neutro da multiplicação de matrizes como veremos mais adiante

  Por exemplo, a matriz identidade de ordem 3 é a matriz

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualdade entre matrizes e matriz transposta

- $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo dizem-se *iguais* se os elementos homólogos forem iguais, isto é, se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 5 & x \\ y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 3 \\ 2 & w \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ w = 6 \end{cases}$

- A *transposta* de $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ é a matriz $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ do tipo $n \times m$, cujas colunas são as linhas de A pela mesma ordem.

  Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

  Tem-se, obviamente, $(A^T)^T = A$.

- $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se *simétrica*, se $A^T = A$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Operações algébricas sobre matrizes: adição de matrizes

As operações algébricas sobre matrizes estendem as operações da adição de vetores, do produto de um vetor por um escalar e do produto escalar de vetores definidas anteriormente.

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são matrizes do mesmo tipo define-se a *soma de A com B*, por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Por outras palavras, os elementos de $A + B$ obtêm-se somando os elementos homólogos de A e de B.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -1+2 & 0+1 \\ 4-3 & 5+1 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Produto de uma matriz por um escalar

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ define-se o *produto de A pelo escalar* λ, por

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Por outras palavras, λA obtém-se multiplicando cada elemento de A por λ

Se $\lambda = -1$, λA denota-se simplesmente por $-A$

Por exemplo, se $\lambda = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix}$, então

$$\lambda A = 3 \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 20 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 13 \\ 3 \cdot 18 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -3 & 39 \\ 54 & -6 & 243 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes e do produto de escalares por matrizes

Sejam A, B e C matrizes do tipo $m \times n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + [0]_{m \times n} = A$ ($[0]_{m \times n}$ matriz cujos elementos são todos nulos)
4. $A + (-A) = [0]_{m \times n}$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8. $1.A = A$
9. $(A + B)^T = A^T + B^T$
10. $(\lambda A)^T = \lambda\, A^T$
11. $(A^T)^T = A$

Propriedades das operações algébricas sobre matrizes

A matriz nula $[0]_{m\times n}$ é portanto o elemento neutro da adição de matrizes.

As propriedades (1)-(8) decorrem das propriedades da adição e do produto de números reais e são análogas às propriedades da adição e do produto por escalar para vetores.

As restantes três propriedades são evidentes.

Exercício na aula

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e I_2 a matriz identidade de ordem 2. Simplifique expressão $((A^T + B)^T + 4I_2)^T$ indicando as propriedades do slide anterior que utilizar e calcule o seu valor.

TPC

Mostre que se A é uma matriz quadrada então $A + A^T$ é simétrica.

Produto de matrizes

- Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas*, se

número de colunas de A = número de linhas de B.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ são encadeadas pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Mas B e A não são encadeadas !

Definição do produto de matrizes

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ são encadeadas, define-se o *produto* de A por B, denotado AB, como sendo a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ik} &= (\text{linha } i \text{ de } A)\cdot(\text{coluna } k \text{ de } B) \\ &= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})\cdot(b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}. \end{aligned}$$

Produto de matrizes

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ são encadeadas, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ \hline 4 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 8 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 2+8+0 & -2+16-5 \\ 4+10+0 & -4+20+0 \\ 1+16+0 & -1+32+25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 14 & 16 \\ 17 & 56 \end{bmatrix}_{3\times 2} \end{aligned}$$

Por exemplo, o elemento de AB que se encontra na linha 3 e coluna 1 é o produto escalar da terceira linha de A pela primeira coluna de B, isto é, $(1,8,5)\cdot(1,2,0) = 17$.

Produto escalar via produto de matrizes. . .

- O produto de matrizes estende o conceito de produto escalar de vetores: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então

$$\boxed{x^T y = x \cdot y}$$

Por exemplo, se $x = (-1,1,3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $y = (1,0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$x^T y = [-1 \;\; 1 \;\; 3]_{1\times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = [(-1,1,3)\cdot(1,0,1)]_{1\times 1} = [2]_{1\times 1} = 2(^1) = x\cdot y$$

- Note-se que $xy^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} [1 \;\; 0 \;\; 1]_{1\times 3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

[1] As matrizes 1×1 identificam-se com a seu único elemento.

Potência de uma matriz quadrada

Potência inteira não negativa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n definem-se as *potências inteiras não negativas de A* por,

$$A^0 = I_n \qquad \text{e} \qquad A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k vezes}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

TPC

Calcular A^3 com $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

Propriedades

Propriedades do produto de matrizes

Sejam A, B, C matrizes, I a matriz identidade de ordem conveniente, $[0]$ a matriz nula de tipo conveniente e $\lambda \in \mathbb{R}$ e k um inteiro não negativo. Sempre que as operações estejam definidas, tem-se:

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva)
3. $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva)
4. $AI = IA = A$ (el. neutro da mult.)
5. $A[0] = [0]A = 0$ (el. absorvente da mult.)
6. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (compatibilidade dos produtos)
7. $(AB)^T = B^T A^T$ (!)
8. $(A^k)^T = (A^T)^k$

“Não propriedades” do produto de matrizes

Ao contrário do que sucede com a adição, algumas propriedades do produto de números reais **não se generalizam** para o produto de matrizes.

Exercício na aula

Calcular os produtos AB e BA com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

O que observa ?

“Não propriedades” do produto de matrizes

- O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, em geral,

$$AB \neq BA.$$

- A lei do anulamento do produto também não é válida, ou seja, em geral,

$$AB = [\,0\,] \quad \not\Rightarrow \quad (A = [\,0\,] \text{ ou } B = [\,0\,]).$$

- A lei do corte também não é válida ou seja, em geral, dadas matrizes A, B e C, com $A \neq [\,0\,]$([2]),

$$AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C.$$

([0] denota uma matriz nula de ordem conveniente)

TPC

Dar exemplos de 3 matrizes quadradas de ordem 2, A, B e C, para as quais a lei do corte falhe

[2] Para a lei do corte ser válida para matrizes devemos substituir a condição $A \neq [\,0\,]$ por A invertível, conceito que daremos mais adiante.

Uma consequência inesperada...

Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem não permutáveis, isto é, $AB \neq BA$, obtém-se aplicando as propriedades distributivas do produto de matrizes,

- $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$.
- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
- $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2-AB-BA+B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

A não comutatividade do produto de matrizes teve como consequência que não são válidos para o produto de matrizes quadradas os análogos dos casos notáveis da multiplicação de números reais!

Observação

Deve-se ter uma particular atenção ao simplificar expressões que envolvam produtos de matrizes!

Simplificação de expressões...

Exercício na aula

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Desenvolva e calcule $((BC)^T + A)^2$.

Ainda o produto de matrizes...

Observação

Se $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{bmatrix}$ então

$$AB = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_p \end{bmatrix},$$

ou seja, a k-ésima coluna do produto AB é o produto de A pela k-ésima coluna de B.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 \ \ v_2]$ com $v_1 = (-1, 0, 3)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix}$$

De facto,

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sistema de equações lineares

Sistema linear

Um sistema linear a m equações e n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é um sistema de equações da forma,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: *coeficiente da variável x_j na i-ésima equação*.
- $b_i \in \mathbb{R}$: *termo constante* ou *membro direito* da i-ésima equação.

- *Solução* de um sistema linear é uma solução comum a todas as equações desse sistema.

Exemplo de um sistema linear a 3 equações e 3 variáveis

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 3 \\ 4\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 6\,x_3 & = & 4 \\ -2\,x_1 & & & - & x_3 & = & -3 \end{array} \right.$$

Com a notação do slide anterior tem-se, por exemplo,

- $a_{11} = 2$: coeficiente da variável x_1 na primeira equação
- $a_{23} = 6$: coeficiente da variável x_3 na segunda equação
- $b_2 = 4$: termo constante ou membro direito da segunda equação
- $b_3 = -3$: termo constante ou membro direito da terceira equação

Conjunto de soluções e classificação de um sistema linear

Resolver um sistema linear é determinar o seu conjunto de soluções (CS).
Um sistema linear é *classificado* como:

- **impossível** (IMP) se não possuir soluções
- **possível** se possuir pelo menos uma solução, sendo:
  - **determinado** (PD), se possuir uma única solução
  - **indeterminado** (PI), se possuir uma infinidade de soluções

Por exemplo, o sistema linear a 2 equações e 2 variáveis,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 & = & 3 \\ x_1 + 2x_2 & = & 4 \end{array} \right.$$

é PD com $CS = \{(2, 1)\}$ (verifique!).

TPC

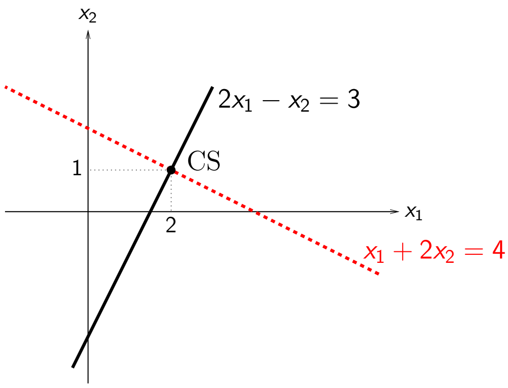
Adaptando o sistema linear anterior dê exemplos de sistemas lineares a 2 equações e 2 variáveis que sejam PI e IMP, indicando em cada caso o respectivo CS.

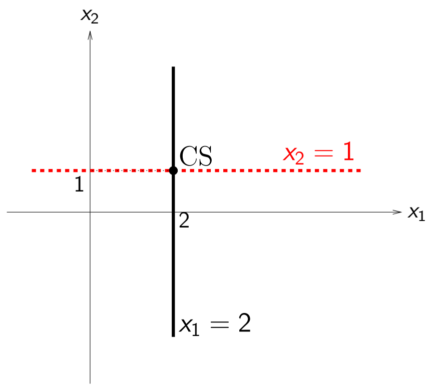
Sistemas equivalentes

- Dois sistemas lineares a m equações e n variáveis dizem-se *equivalentes* se possuem o mesmo conjunto de soluções (CS).

São equivalentes os seguintes sistemas a 2 equações e 2 variáveis:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{cases} \text{ (sistema reduzido)}$$





- As equações de quaisquer duas retas concorrentes no ponto $(2, 1)$ definem um sistema linear equivalente aos sistemas anteriores.

Matriz ampliada de um sistema a m equações e n variáveis

Consideremos o sistema linear a m equações e n variáveis,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ chama-se *matriz dos coeficientes* do sistema linear,
- $b = (b_1, \ldots, b_m)$ chama-se o *vetor dos termos constantes* ou *membros direitos* do sistema,
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ chama-se *vetor das incógnitas* ou *variáveis* do sistema e finalmente,
- $[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$, chama-se *matriz ampliada do sistema* e contém toda a sua informação relevante

Matriz em escada e matriz reduzida

- Uma matriz diz-se em *escada* se o primeiro elemento não nulo de cada linha, que se designa por *pivot*, estiver à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior e todas as linhas nulas, caso existam, aparecerem no fim
- Uma matriz diz-se *reduzida* se
  - estiver em escada,
  - todos os pivots forem iguais a 1,
  - em cada coluna com pivot apenas o pivot é não nulo.

Exemplos de matrizes em escada e reduzida com os pivots a vermelho,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um sistema linear diz-se em *escada/reduzido* se a respectiva matriz dos coeficientes estiver em escada/reduzida.

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

(I) "Apagador" - Adicionar a uma linha i uma linha $j \neq i$ multiplicada por um escalar λ ($L_i + \lambda L_j$).

(II) Multiplicar uma linha i por um escalar $\lambda \neq 0$ (λL_i).

(III) Permutar uma linha i com uma linha j ($L_i \leftrightarrow L_j$).

A notação entre parênteses é uma simplificação da notação usada no Texto de Apoio!

Teorema

As operações elementares (I), (II) e (III) transformam a matriz ampliada de um sistema linear na matriz ampliada de um sistema linear equivalente, ou seja, com o mesmo CS.

Definem-se de modo análogo operações elementares sobre as equações de um sistema linear.

Método de eliminação de Gauss para redução de sistemas

O método de eliminação de Gauss desenvolve-se em duas fases (descendente e ascendente), aplicando operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear, de acordo com o seguinte esquema:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{[A|b]} \arrow[r, "\text{operações elementares}"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\text{fase descendente}"'] & \cdots \arrow[r] & \boxed{[A'|b'],\ A' \text{ em escada}} \arrow[d] \arrow[r, "\text{operações elementares}"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\text{fase ascendente}"'] & \cdots \arrow[r] & \boxed{[A''|b''],\ A'' \text{ reduzida}} \arrow[d] \\
& & \text{classificar o sistema } Ax = b & & \text{resolver o sistema } Ax = b
\end{tikzcd}$$

Exemplificação do método de Gauss

Exemplo na aula

Vejamos como se processa o método de eliminação de Gauss no sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

que representa a intersecção de 3 planos em $\mathbb{R}^3$.

TPC

Resolver os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \qquad (b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Redução do sistema: fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema do exemplo do slide anterior obtém-se:

$$[A|b] \quad = \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 8 & -4 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

Matriz dos coeficientes A' em **escada** $\Rightarrow$ podemos classificar o sistema:

- Todas as linhas de $[A'|b']$ correspondem a equações possíveis, isto é, não são do tipo $0\ 0\ 0 \mid *$ com $* \neq 0$([3]). Logo o sistema é possível.
- Todas as colunas de A' têm *pivot* e portanto não há variáveis livres([4]). Logo o sistema é determinado e o CS é um ponto em $\mathbb{R}^3$.

[3] Que correspondem à equação impossível $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = *$.
[4] Cada variável fica determinada por uma equação.

Conclusão da redução do sistema: fase ascendente

$$[A'|b'] \quad = \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{6}L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 + 5L_3]{L_1 - 2L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}L_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 + L_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = [A''|b''].$$

Matriz dos coeficientes A'' está **reduzida** e $[A''|b'']$ corresponde à matriz ampliada do sistema reduzido,

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 2 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Logo, $CS = \{(2, 1, -1)\}$.

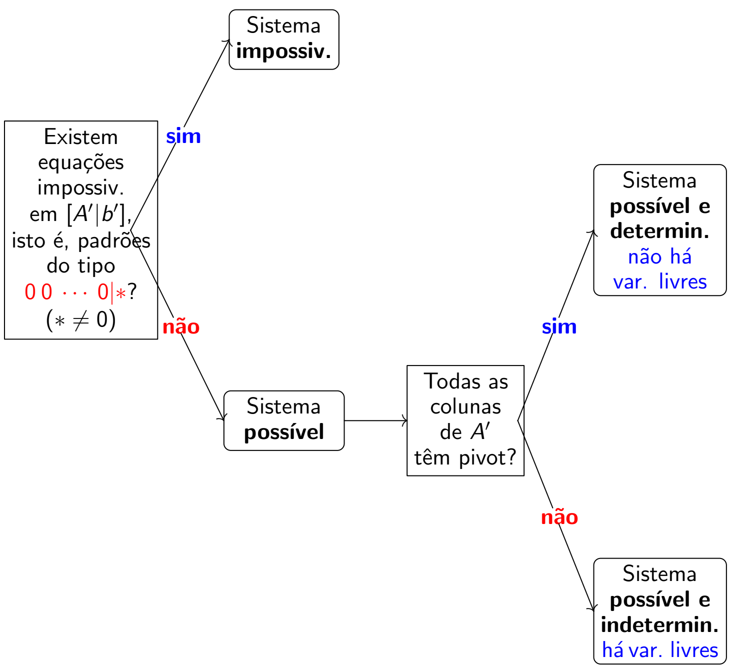
Algoritmo de eliminação de Gauss: fase descendente

- **Input:** Matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear
- **Objectivo:** Redução do sistema linear
- **Fase descendente:**
  - Aplicando operações elementares do tipo III trocar, se necessário, linhas em $[A|b]$ de modo a que o pivot da primeira linha se encontre na coluna não nula mais à esquerda da matriz dos coeficientes
  - Usando operações elementares do tipo I ("Apagador") e o pivot da primeira linha, eliminar os restantes elementos da coluna abaixo desse pivot
  - Repetir os procedimentos anteriores relativamente à submatriz que se obtém ignorando a primeira linha e assim sucessivamente enquanto existirem linhas não nulas na matriz dos coeficientes dessa submatriz

No final da fase descendente obtém-se uma matriz $[A'|b']$ com A' em escada e podemos classificar o sistema.

A matriz $[A'|b']$ **não é única**, i.e, depende das operações efetuadas.

Classificação do sistema em escada



Variáveis *pivot* e variáveis livres

Observação

- As variáveis associadas às colunas sem *pivot* na matriz em escada designam-se por variáveis livres e podem tomar qualquer valor em $\mathbb{R}$.
- As variáveis associadas às colunas com *pivot* na matriz em escada designam-se por variáveis *pivot* ou variáveis determinadas e são escritas em função das variáveis livres.

Algoritmo de eliminação de Gauss: fase ascendente

- **Fase ascendente:** (apenas se aplica aos sistemas possíveis)
  - Usando operações elementares do tipo II e I tornar o pivot que se encontra mais à direita na matriz A' igual a 1 e usar esse pivot para eliminar os elementos da coluna acima desse pivot
  - Repetir os procedimentos do passo anterior relativamente à coluna com pivot imediatamente anterior e assim sucessivamente enquanto existirem colunas com pivot (percorrendo a matriz da direita para a esquerda)

No final da fase ascendente obtém-se uma matriz $[A''|b'']$ com A'' reduzida, donde resulta imediatamente o CS do sistema, escrevendo as variáveis pivot em função das variáveis livres. Observemos que:

- A matriz $[A''|b'']$ é **única**, isto é, não depende da sequência de operações elementares efectuada
- Dois sistemas com m equações lineares e n variáveis são **equivalentes** se e só se aplicando o método de Gauss às respetivas matrizes ampliadas obtemos **a mesma matriz reduzida**.

Método de eliminação de Gauss

Exercícios na aula

Aplicando o método de Gauss reduza os seguintes sistemas lineares:

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4 \\ -2x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & = & -3 \end{array}\right.$$

$$(b)\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Redução do sistema do exemplo (a): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do 1º sistema do slide anterior obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + L_1]{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 4L_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em **escada**, tendo-se:

- Não há linhas do tipo $0\ 0\ 0\ 0 \,|\, *$ com $* \neq 0$, isto é, não há equações impossíveis.
- A 4ª coluna de A' não tem pivot logo x_4 é variável livre, isto é, pode tomar qualquer valor.

Logo o sistema é **possível indeterminado** (PI).

Redução do sistema do exemplo (a): fase ascendente

Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss à matriz em escada $[A'|b']$ do slide anterior obtém-se:

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 - L_3]{L_1 - 2L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A''|b''] \dashrightarrow \begin{cases} x_1 & & & & = & 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes A'' está em **reduzida**. Passando nas duas últimas equações a variável livre x_4 para o membro direito, podemos escrever as variáveis *pivot* (a azul) à custa da variável livre x_4, obtendo-se

$$CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 = 1, \ x_2 = -1 + x_4, \ x_3 = 1 - x_4, \ x_4 \in \mathbb{R}\},$$

que possui uma infinidade de soluções.

TPC: dar exemplos de soluções do sistema linear anterior

Redução do exemplo (b): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do 2º sistema do slide 45 obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

- A última linha da matriz $[A'|b']$ é do tipo $0 \ 0 \ 0 \,|\, *$ com $* \neq 0$ e corresponde portanto a uma equação impossível.

Logo o sistema é **impossível** (IMP) e $CS = \emptyset$.

A equação matricial $Ax = b$

- Consideremos a equação matricial $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Tem-se,

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}. \end{aligned}$$

- Obteve-se uma relação importante - a equação matricial $Ax = b$ é equivalente ao sistema linear cuja matriz ampliada é $[A|b]$

Sistemas lineares na forma matricial Ax=b

Efetuando o mesmo tipo de cálculos pode-se mostrar facilmente que se tem, em geral, a equivalência

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b,$$

com $A = [a_{ij}]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_m)$, isto é, entre o sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ e a equação matricial $Ax = b$, o que permite traduzir os sistemas lineares para a linguagem das matrizes.

Observações

- Por abuso de linguagem, iremos ainda designar por sistema linear tanto a equação matricial $Ax = b$ como a respetiva a matriz ampliada $[A|b]$.
- Uma solução do sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ é uma solução de $Ax = b$, isto é, um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = b$.

TPC: traduzindo o sistema do slide 49 para a equação matricial equivalente, mostre que $(2, 1 - 1)$ é solução desse sistema.

Interpretação geométrica de sistemas lineares - exercício

Exercício na aula

Considere o sistema a 2 equações e 3 variáveis, com parâmetros $c, d \in \mathbb{R}$,

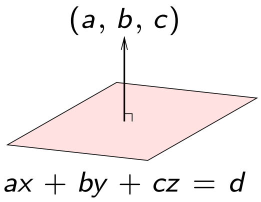
$$\begin{cases} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + cz &= d \end{cases}$$

Discuta e interprete geometricamente o sistema anterior para todos os valores dos parâmetros $c, d \in \mathbb{R}$.

Resolução: comecemos por recordar que cada equação linear do tipo

$$ax + by + cz = d,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com a, b, c não todos nulos define um plano no espaço ($\mathbb{R}^3$) com vetor normal (a, b, c).



Logo o sistema anterior representa a intersecção de 2 planos no espaço.

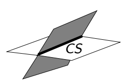
Resolução do exerecício (cont.)

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema linear do slide 51 obtém-se:

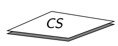
$$[A \,|\, b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & c & d \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & c-6 & d-12 \end{array}\right] = [A' \,|\, b'].$$

Discussão e interpretação geométrica do sistema:

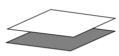
- Para $c \neq 6$ e d arbitrário o sistema é PI com 1 variável livre (y). Neste caso os **vetores normais aos planos não são múltiplos entre si** e o sistema representa 2 planos concorrentes numa reta. Logo $CS =$ reta.



- Para $c = 6$ os **vetores normais são múltiplos entre si** e temos 2 casos:
  - Se $d = 12$ o sistema é PI com 2 variáveis livres (y e z). Neste caso as duas equações são equivalentes e o sistema representa 2 planos coincidentes. Logo $CS =$ plano.



  - Se $d \neq 12$ o sistema é IMP. Neste caso o sistema representa 2 planos paralelos, não coincidentes. Logo $CS = \emptyset$.



Interpretação geométrica de sistemas de equações lineares

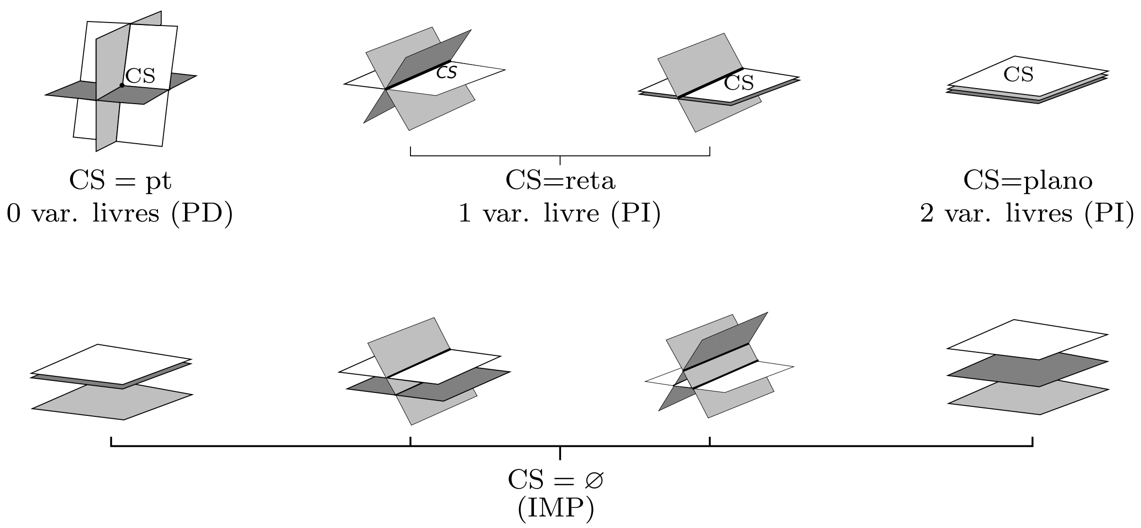
Em geral, tem-se o seguinte:

- Um sistema linear a m equações e n variáveis representa a **intersecção** de:
  - m retas em $\mathbb{R}^2$ (plano), se $n = 2$ (por exemplo, slide 33),
  - m planos em $\mathbb{R}^3$ (espaço), se $n = 3$ (por exemplo, slide 51),
  - m hiperplanos em $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 4$ (por exemplo, (a) do slide 45).
- O número de variáveis livres([5]) de um sistema linear (possível) determina o tipo de CS que esse sistema possui. Por exemplo:
  - Se o número de variáveis livres for zero, o CS é um **ponto**
  - Se o número de variáveis livres for um, o CS é uma **reta**
  - Se o número de variáveis livres for dois, o CS é um **plano**
- Iremos principalmente interpretar sistemas lineares com 2 e 3 variáveis, ou seja, cujos CS estão contidos no plano e no espaço.

[5] Também designado por *grau de indeterminação do sistema.*

Geometria dos sistemas lineares a 3 equações e 3 variáveis

- Um sistema a 3 equações e 3 variáveis representa a interseção de 3 planos no espaço ($\mathbb{R}^3$) e geometricamente temos 8 casos:



TPC (Desafio)

Dar exemplos de sistemas com 3 equações e 3 variáveis para cada um dos 8 casos anteriores

Inversa de uma matriz

Definição de inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *invertível* ou *não singular* se existir uma matriz quadrada B da mesma ordem tal que

$$AB = I_n \qquad \text{e} \qquad BA = I_n,$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n. Caso contrário, A diz-se *singular*. A matriz B, quando existe, designa-se por *inversa* de A

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível com inversa $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

De facto, tem-se

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ BA &= \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ \hline -3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Unicidade da inversa

Proposição

A inversa de uma matriz A, quando existe, é única e denota-se por A^{-1}.

Por exemplo, considerando as matrizes A e B do slide anterior, tem-se que B é a única inversa de A e podemos escrever, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Demonstração da proposição

Consideremos inversas arbitrárias B e C de A. Queremos mostrar que têm que ser a mesma. Como B é inversa de A tem-se, em particular,

$$BA = I.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade à direita por C tem-se

$$BAC = C,$$

donde resulta imediatamente $B = C$ uma vez que $AC = I$. $\square$

Ainda sobre a inversa...

Observação

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n pode-se mostrar que

$$AB = I_n \quad \Leftrightarrow \quad BA = I_n,$$

Logo para provar que uma matriz quadrada A é invertível basta mostrar existe uma matriz quadrada B da mesma ordem que verifique uma das relações,

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n,$$

concluindo-se nessa altura que A e B são inversas uma da outra.

Exercícios na aula

- Mostre que se B é a inversa de A^2 então AB é inversa de A
- Determine, caso exista, a inversa da matriz $\text{diag}(2, 3)$.

TPC

Mostre que se $A_{n\times n}$ verifica $A^3 - 3A - I_n = 0$ então A é invertível e indique a respetiva inversa.

Propriedades da inversa

Proposição

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então:

1. A^{-1} é invertível e tem-se $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. λA é invertível para todo o $\lambda \neq 0$ e tem-se $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
3. AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ou seja, a inversa do produto é o produto das inversas, pela ordem inversa([6]).
4. A^k é invertível para todo o $k \in \mathbb{N}$ e tem-se $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
5. A^T é invertível e tem-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(A demonstração das propriedades será feita nas aulas práticas.)

Potências negativas de matrizes invertíveis

Se A é uma matriz invertível, define-se

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

[6] Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são invertíveis da mesma ordem, então $A_1A_2 \cdots A_k$ é também invertível e tem-se $(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Cálculo da inversa de uma matriz - exemplo

- Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Para determinarmos a inversa de A, caso exista, vamos resolver a equação matricial

$$AX = I_2,$$

onde X é uma matriz de incógnitas quadrada de ordem 2. Nessa altura sabemos que a solução desta equação, quando existe, corresponde à inversa de A. E em particular, tem que ser única.

- Escrevendo, $X = [\,x \quad y\,] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ e $I_2 = [\,e_1 \quad e_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$\begin{aligned} AX = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad A\,[\,x \quad y\,] = [\,e_1 \quad e_2\,] \\ &\Leftrightarrow \quad [\,Ax \quad Ay\,] = [\,e_1 \quad e_2\,] \quad (\text{ver o slide 29}) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ax = e_1 \dashrightarrow [A|e_1] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \\ \\ Ay = e_2 \dashrightarrow [A|e_2] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Redução simultânea de sistemas lineares e inversa

- Obtivemos 2 sistemas com a mesma matriz de coeficientes A.
- Podemos reduzir simultaneamente ambos os sistemas $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$, ampliando A com e_1, e_2, isto é, com a matriz identidade I_2.

  Aplicando a fase descendente tem-se,

$$[\,A\,|\,I_2\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \dashrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{cases}$$

  Como os sistemas $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$ são ambos PD, $AX = I_2$ é possível com solução única $X = A^{-1}$. Em particular, A é invertível.

- Aplicando a fase ascendente tem-se,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

  Logo as soluções de $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$ são $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, e obtém-se

$$A^{-1} = X = [\,x \quad y\,] = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inversa e redução simultânea de sistemas (caso geral)

- Pode-se mostrar analogamente que resolver a equação matricial $AX = I_n$ com A matriz arbitrária de ordem n, equivale a resolver n sistemas lineares com matrizes ampliadas
$$[\,A\,|\,e_1\,], \quad [\,A\,|\,e_2\,], \quad \cdots, \quad [\,A\,|\,e_n\,], \tag{1}$$
onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são as colunas da matriz identidade I_n.
- Como os n sistemas têm a mesma matriz de coeficientes A podem ser resolvidos simultaneamente aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[\,A\,|\,e_1\ e_2\ \cdots\ e_n\,] = [\,A\,|\,I_n\,]$.
- Pela **unicidade da inversa**, um dos dois casos tem de ocorrer:
  - os n sistemas (1) são todos PD - nessa altura A é invertível e as n colunas de A^{-1} são as soluções dos n sistemas (1);
  - pelo menos um dos n sistemas (1) é impossível - nessa altura A é singular.
- A redução simultânea de sistemas pode também ser aplicada para resolver equações matriciais mais gerais, do tipo $AX = B$, aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[\,A\,|\,B\,]\ldots$

Algoritmo da inversa

Das considerações dos slide anterior deduz-se o seguinte algoritmo.

- `Input:` Matriz quadrada A
- `Objectivo:` Decidir sobre a invertibilidade de A e calcular A^{-1}

$$[\,A\,|\,I\,] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{(A' \text{ em escada})}{[\,A'\,|\,I'\,]} \xrightarrow{(\text{se } A \text{ invertível})} \cdots \longrightarrow [\,I\,|\,A^{-1}\,]$$

Existem linhas nulas em A' $\Downarrow$ A é singular — STOP

Não existem linhas nulas em A' $\Downarrow$ A é invertível

Algoritmo da inversa

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo da inversa, decida sobre a invertibilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e determine a sua inversa (caso exista).

Qual é a solução do sistema linear $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(**Sugestão**: ver o slide 61.)

Resolução aplicando o algoritmo da inversa

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A'\,|\,I'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em escada e não tem linhas nulas. Logo A é invertível. Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss vem,

$$[\,A'\,|\,I'\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\,I\,|\,A^{-1}\,].$$

Podemos confirmar que A^{-1} está bem calculada verificando a relação $AA^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & o \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

O vetor $(1, 0, 0)$ é a 1ª coluna da matriz identidade, que denotámos por e_1.
Logo a solução de $Ax = e_1$ é a primeira coluna de A^{-1}, isto é, $(-1, 0, -1)$.

Caso particular: inversa de matrizes diagonais

Efetuando trocas de linhas conclui-se facilmente que qualquer matriz em escada A' obtida a partir de uma matriz diagonal,

$$A = \operatorname{diag}(a_1, a_2 \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

não tem linhas nulas se e só se $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$. Nessa altura, podemos obter imediatamente a inversa de A.

Proposição

A matriz $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é invertível se e só se $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$, tendo-se nessa caso

$$\operatorname{diag}^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \operatorname{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}).$$

Por exemplo,

$$\operatorname{diag}^{-1}(2, 5, \pi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{\pi}).$$

Interlúdio: característica de uma matriz

Definição de característica

A característica de uma matriz A, denotada $\operatorname{car}(A)$, é o número de pivots de qualquer matriz em escada que seja obtida a partir de A, por aplicação de operações elementares do método de eliminação de Gauss nas linhas de A.

- A característica está bem definida uma vez que coincide com o número de pivots da matriz reduzida, que é única, e a fase ascendente do método de Gauss não altera o número de pivots.
- $\operatorname{car}(A)$ corresponde também ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em escada obtida a partir de A.
- Uma vez que não pode haver mais que um pivot em cada linha e em cada coluna de uma matriz em escada, a característica de uma matriz $A_{m\times n}$ não pode ultrapassar o número de linhas m nem o número de colunas n de A, isto é,

$$\operatorname{car}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

- Pode-se provar que para qualquer matriz $A_{m\times n}$ se tem a relação:

$$\operatorname{car}(A^T) = \operatorname{car}(A).$$

Exemplo

- Se, por exemplo,

$$A_{4\times 5} \rightarrow \overset{\text{oper. elementares}}{\cdots} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5},$$

tem-se $\text{car}(A) = 3 \leq \min\{4, 5\}$.

Questão

Considerando a mesma matriz A do exemplo acima, qual seria o número de linhas nulas de uma matriz em escada que fosse obtida a partir de A^T por aplicação de operações elementares?

Inversa e característica

Uma vez que uma matriz **quadrada** em **escada** só possui linhas nulas se existirem colunas sem pivot, obtém-se imediatamente o seguinte critério de invertibilidade.

Teorema (critério de invertibilidade)

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se $\text{car}(A) = n$.

Exercício na aula

Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix}$ é invertível ?

Resolução: Aplicando a fase descendente do método de Gauss tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 2\alpha & 6+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que $A_{3\times 3}$ é ínvertível se e só se $\text{car}(A) = 3$ se e só se $\alpha \neq 0, 2$.

Aplicação da matriz inversa aos sistemas lineares

- A equação linear $ax = b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, admite a solução única $x = \dfrac{b}{a}$, que se pode escrever na forma $x = a^{-1}b$.
- A noção de inversa de uma matriz permite obter a solução de um sistema do tipo $Ax = b$ com A invertível, de uma forma análoga.

Proposição

Se A é uma matriz invertível então o sistema linear $Ax = b$ é PD com solução única $x = A^{-1}b$ qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^n$.

De facto, se A é invertível, existe A^{-1} e podemos escrever, multiplicando à esquerda ambos os membros da equação matricial $Ax = b$ por A^{-1},

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Rightarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad I\,x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Hors-d'oeuvre: transformações lineares

Uma matriz $A_{m\times n}$ define de forma natural uma transformação $T = T_A$,

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & A\,x \end{array}$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, obtém-se a transformação $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix},$$

ou seja, em termos de coordenadas vem dada por,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3\,,\ x_1 - x_3).$$

Vejamos alguns casos bem conhecidos de transformações geométricas no plano e no espaço que podem ser definidas por matrizes([7]).

[7] Nem todas as transformações geométricas no plano e no espaço podem ser definidas a partir de matrizes como acima.

Transformações geométricas no plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$

Exemplos de transformações geométricas do plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$ (algumas dessas transformações estão ilustradas na parte superior do slide 74):

- Se $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \alpha I_2$ com $\alpha > 0$ obtém-se a homotetia de razão α,
$$H_\alpha(x) = T_{\alpha I_2}(x) = (\alpha I_2)\, x = \alpha x,$$
isto é, em coordenadas,
$$H_\alpha(x_1, x_2) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2),$$
que corresponde a uma dilatação [contração] se $\alpha > 1$ [$\alpha < 1$].

- Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (matriz de permutação), obtém-se
$$S(x) = T_A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$
isto é,
$$S(x_1, x_2) = (x_2, x_1),$$
que corresponde à reflexão relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Transformações geom. no plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$ (cont.)

- Se $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se
$$R(x) = T_A(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},$$
isto é,
$$R(x_1, x_2) = (-x_2, x_1),$$
que corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos (no sentido anti-horário).

- Mais geralmente, se $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, obtém-se a rotação de θ radianos (no sentido anti-horário)
$$R_\theta(x) = T_{A_\theta}(x),$$
que corresponde à rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos (no sentido anti-horário) e se deixa como exercício os alunos descreverem em termos de coordenadas. Note que $R = R_{\frac{\pi}{2}}$.

- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se a projeção no eixo dos xx,
$$P_1(x_1, x_2) = x_1.$$

Transformações geométricas no espaço definidas por matrizes $A_{3\times 3}$

Algumas transformações geométricas do espaço definidas por matrizes $A_{3\times 3}$ (algumas dessas transformações estão ilustradas na parte inferior do slide 74):

- Se $A = \alpha I_3$ com $\alpha > 0$ obtém-se a homotetia no plano de razão α:

$$H_\alpha(x) = T_{\alpha I_3}(x) = (\alpha I_3)x = \alpha x,$$

isto é, em coordenadas,

$$H_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \alpha\, x_3),$$

que corresponde uma dilatação [contração] se $\alpha > 1$ [$\alpha > 1$].

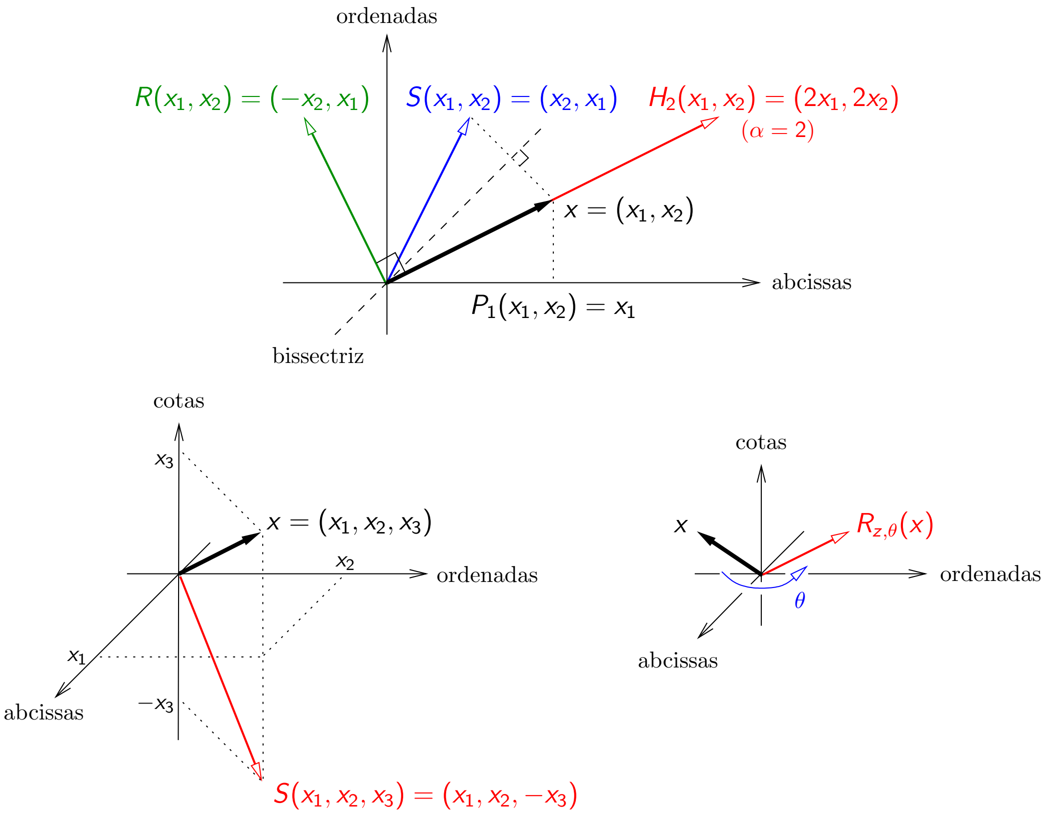
- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, obtém-se a simetria em relação ao plano xOy,

$$S(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

isto é, em coordenadas, $S_z(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$. (não foi dado na aula).

- Se $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtém-se a rotação de θ radianos em torno do eixo dos zz (no sentido direto), $R_{z,\theta} = Ax$, que se deixa como exercício para os alunos descreverem em termos de coordenadas.

Ilustração de algumas das transformações geométricas do plano e do espaço



Definição de transformação linear e propriedades

Definição de transformação linear

Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se linear se verificar as seguintes propriedades para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ (aditividade)
- $T(\alpha\, x) = \alpha\, T(x)$ (homogeneidade)

Algumas consequências

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear então

- $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

- Mais geralmente, para todo o $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, tem-se,

$$T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_k T(u_k).$$

Transformações lineares

Teorema (equivalência entre transf. matricial e linear)

- Toda a transformação matricial $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por uma matriz $A_{m\times n}$ é linear.
- Reciprocamente, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear então T é definida por uma matriz, mais precisamente, $T = T_A$. com

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix},$$

onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são as n colunas da matriz identidade.
A matriz A designa-se por matriz *standard* da transformação linear T.

A demonstração do primeiro ponto é imediata. De facto, se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y),$$
$$T_A(\alpha\, x) = A(\alpha\, x) = \alpha\, Ax = \alpha\, T_A(x).$$

Relativamente ao 2º ponto vamos apenas mostrar como se pode obter a matriz da transformação linear num exemplo.

Matriz de uma transformação linear - exemplo

Consideremos a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 \,,\; x_1 - x_3).$$

Vejamos como podemos obter a matriz desta transformação linear. Podemos escrever,

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= T(x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)) \\ &= x_1 \underbrace{T(1,0,0)}_{(1,1)} + x_2 \underbrace{T(0,1,0)}_{(1,0)} + x_3 \underbrace{T(0,0,1)}_{(1,-1)} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo $T(x) = Ax$, com $A = [\, T(e_1) \;\; T(e_2) \;\; T(e_3)\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$.

$$\text{De facto,} \quad \begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 0x_2 - x_3 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 \,,\; x_1 - x_3) = T(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Composição de transformações lineares

Dadas matrizes encadeadas $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ tem-se,

$$T_A(T_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = T_{AB}(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^p$, ou seja, a composição das transformações lineares definidas pelas matrizes encadeadas $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$,

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^m,$$

é a transformação definida pelo produto $(AB)_{m\times p}$,

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{T_{AB}} \mathbb{R}^m,$$

o que permite interpretar o produto de matrizes em termos de composição de transformações lineares.

Composição de transformações lineares - exemplos

Exemplo

Mantendo as notações das transformações geométricas do plano,

$$R(x) = T_A(x), \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$S(x) = T_B(x), \quad \text{com} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto a composição de R com S vem dada por,

$$(R \circ S)(x) = T_A(T_B(x)) = T_{AB}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-x_1, x_2),$$

que corresponde à reflexão no plano relativamente ao eixo dos yy.

De facto, em coordenadas, $R(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ e $S(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Logo,

$$R(S(x_1, x_2)) = R(x_2, x_1) = (-x_1, x_2).$$

Inversa de uma transformação linear

Uma transformação linear

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

diz-se invertível se existir uma transformação

$$S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

tal que

$$T_A \circ S = S \circ T_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Nessa altura prova-se que S é também linear e tem-se, escrevendo $S = T_B$,

$$T_A \circ T_B = T_B \circ T_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = T_{I_n} \Leftrightarrow AB = BA = I_n,$$

ou seja, A é invertível com inversa B. A transformação $S = T_B$ designa-se inversa de A e denota-se T_A^{-1}. Obteve-se então o resultado.

Proposição

Uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é invertível se e só se A é invertível e nessa altura a sua inversa é $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$.

Inversa de uma transformação linear - exemplos

Exemplos

- A inversa da rotação $R_{z,\theta}$ em torno do eixo dos zz de θ radianos é a rotação $R_{z,-\theta}$ (verifique).
- Considerando $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, obtém-se

$$T_A(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2) \qquad (\textit{verifique}).$$

Como A é invertível com inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$T_A^{-1}(x) = T_{A^{-1}}(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix},$$

isto é, $T_A^{-1}(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + 2x_2)$.

De facto, $T_A(T_A^{-1}(x_1, x_2)) = T_A^{-1}(T_A(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$ (confirme).

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

No slide 8 mencionámos as seguintes propriedades das operações, adição de vetores de $\mathbb{R}^n$ e produto de um vetor de $\mathbb{R}^n$ por um escalar, que decorrem imediatamente de propriedades análogas dos números reais.

Propriedades das operações algébricas com vetores

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

Estas 8 propriedades podem ser resumidas dizendo que $\mathbb{R}^n$ munido da adição de vetores e do produto de vetores por escalares é um *espaço vetorial*...

Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

Vamos estudar os subconjuntos não vazios $V \subset \mathbb{R}^n$ para os quais se podem adicionar vetores de V e multiplicar vetores de V por escalares sem sair de V, isto é, de modo a ainda se obterem vetores de V.

Definição de subespaço vetorial

Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um *subespaço vetorial* de $\mathbb{R}^n$ se

- $V \neq \varnothing$
- V é fechado para a adição, isto é, para todo o $u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$
- V é fechado para o produto por escalar, isto é, para todo o $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha u \in V$

Observação

É imediato verificar que se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ ainda são válidas as propriedades $(1), \ldots, (8)$ relativamente aos vetores de V, isto é, que V munido das operações adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares, herda a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Conceito de subespaço vetorial

Exercício na aula

Quais dos seguintes conjuntos $V \subset \mathbb{R}^2$ definem subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$?

- $V = \{(x, y) : xy = 0\}$ (eixos coordenados de $\mathbb{R}^2$)
- $V = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ (1^{o} quadrante de $\mathbb{R}^2$)
- $V = \{(x, y) : y = 0\}$ (eixo dos xx).

Subespaço mininal e subespaço maximal

As 3 condições da definição de subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ do slide 83 são trivialmente verificadas quando $V = \{\vec{0}\}$ e $V = \mathbb{R}^n$, obtendo-se os seguintes 2 subespaços vetoriais especiais de $\mathbb{R}^n$:

- $\{\vec{0}\}$ subespaço vetorial minimal (ou trivial).
- $\mathbb{R}^n$ subespaço vetorial maximal.

Condição **necessária** para ser subespaço vetorial...

Vamos agora estabelecer uma condição necessária (mas não suficiente) para um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definir um subespaço vetorial.

Teorema

Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ então $\vec{0} \in V$.

Demonstração: Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, tem-se:

- $V \neq \emptyset$, logo existe um vetor $v \in V$.
- V é fechado para o produto por escalar, logo $\lambda v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Considerando, em particular, $\lambda = 0$, conclui-se que $0v = \vec{0} \in V$ como se pretendia. $\square$

Exemplo

$V = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois $(0, 0) \notin V$ $(0^2 + 0^2 \neq 1)$. O que representa geometricamente V?

Espaço nulo de uma matriz

O seguinte conceito introduz o primeiro dos subespaços vetoriais fundamentais associados a matrizes que vamos considerar.

Definição de espaço nulo de uma matriz

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se *espaço nulo de A* e denota-se por $\mathcal{N}(A)$, ao conjunto de soluções do sistema linear $Ax = \vec{0}$, isto é,

$$\mathcal{N}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = \vec{0}\right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- O espaço nulo de A corresponde ao CS do sistema linear $Ax = \vec{0}$, dito homogéneo, em que o vetor dos termos constantes é o vetor nulo.
- Um sistema homogéneo nunca é impossível uma vez que possui sempre a solução trivial $x = \vec{0}$ (pois $A\vec{0} = \vec{0}$). Em particular $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$.
- Para calcularmos $\mathcal{N}(A)$ temos que resolver o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$, isto é, temos que reduzir a matriz ampliada $\left[\, A \,|\, \vec{0} \,\right]$ ([8]).

[8] O vetor dos termos constantes pode ser omitido, uma vez que é sempre nulo ao longo do método de Gauss.

Espaço nulo - exercícios na aula

Exercícios na aula

Determine os espaços nulos das seguintes matrizes:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$.
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Reduzindo a matriz ampliada $[\, A \,|\, \vec{0}\,]$ do 1º sistema obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rl} x_1 & = 0 \\ x_2 - x_3 & = 0. \end{array}\right.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0,\ x_2 = x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(0,1,1) : x_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

- Geometricamente $\mathcal{N}(A)$ define uma reta de $\mathbb{R}^3$ (porque o sistema $Ax = \vec{0}$ possui uma variável livre), que passa na origem (porque o sistema é homogéneo) com vetor diretor $v = (0, 1, 1)$.

Cálculo do espaço nulo do 2º exercício

Consideremos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss obtém-se,

$$[A \,|\, \vec{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{array}\right] = [A' \,|\, \vec{0}].$$

  Uma vez que todas as colunas de A' têm pivot o sistema $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto possui apenas a solução trivial $x_1 = x_2 = 0$, isto é, $CS = \{(0,0)\}$.([9])

- Logo $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, $\mathcal{N}(A)$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^2$.

Critério para $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal)

$\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow Ax = \vec{0}$ é determinado $\Leftrightarrow$ car(A)=nº colunas de A.

[9] Confirme que aplicando a fase ascendente à matriz ampliada $[A' \,|\, \vec{0}]$ se obtém a matriz $[I_2 \,|\, \vec{0}]$, com I_2 a matriz identidade de ordem 2, e portanto que a solução (única) do sistema é $x_1 = x_2 = 0$.

O espaço nulo é um subespaço vetorial...

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ então $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Temos que verificar as 3 condições da definição de subespaço vetorial do slide 83:

- $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ como vimos no slide 87.
- $\mathcal{N}(A)$ fechado para a adição: se $u, v \in \mathcal{N}(A)$ então u e v são soluções de $Ax = \vec{0}$, isto é, $Au = Av = \vec{0}$ e portanto $A(u+v) = Au + Av = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, o que significa que $u + v$ é também solução de $Ax = \vec{0}$. Logo $u + v \in \mathcal{N}(A)$.
- $\mathcal{N}(A)$ fechado para o produto por escalar fica para os alunos mostrarem... $\square$

Subespaços vetoriais definidos por CS

O CS de qualquer sistema linear homogéneo com n variáveis define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, pois corresponde ao espaço nulo da matriz dos coeficientes desse sistema (que possui n colunas).

- Por exemplo, o seguinte CS de um sistema homogéneo,

  $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\}$,

  é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, pois $V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

O CS de um sistema linear não homogéneo nunca define um subespaço vetorial uma vez que não contém o vetor nulo (origem).

- Por exemplo, o plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação não homogénea $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$,

  $$V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\},$$

  não define um subespaço vetorial porque não passa na origem.

Possíveis subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$

Mas afinal, que conjuntos definem subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$?

- Subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$):

  $$\{\vec{0}\},\quad \text{retas que passam na origem},\quad \mathbb{R}^2.$$

- Subespaços vetoriais do espaço ($\mathbb{R}^3$):

  $$\{\vec{0}\},\quad \text{retas e planos que passam na origem},\quad \mathbb{R}^3.$$

- Subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$:

  $$\{\vec{0}\},\quad \text{retas, \ldots e hiperplanos que passam na origem},\quad \mathbb{R}^n.$$

  (um hiperplano é um conjunto definido por uma equação linear do tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, com os coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, não todos nulos.)

Combinação linear de vetores

Definição de combinação linear

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é **combinação linear** (CL) de $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ chamam-se *coeficientes* da combinação linear.

Por outras palavras, b é CL de $v_1, \ldots, v_n$ se puder ser obtido como soma de múltiplos desses vetores.

Exemplos de combinações lineares de vetores

- $(-2, -4, -2) = -2(1, 2, 1)$.
- $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- O vetor nulo $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ é CL de qualquer conjunto de m vetores $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{0} = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_m$$

- E cada um dos vetores v_i é CL dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m$:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_m, \\ v_2 &= 0\, v_1 + 1\, v_2 + \cdots + 0\, v_m, \\ &\vdots \\ v_m &= 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 1\, v_m. \end{aligned}$$

Determinação da combinação linear de vetores - exemplo

- Será que $b = (2,5,1)$ é CL de $v_1 = (2,2,1)$ e $v_2 = (2,3,1)$?
- Por outras palavras, será que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \ ?$$

Ora,

$$\begin{aligned} b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Logo (α_1, α_2) é solução do sistema cuja matriz ampliada é $[\, v_1 \ \ v_2 \mid b \,]$!

Determinação da combinação linear do exemplo (concl.)

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss a $[\, v_1 \ \ v_2 \mid b \,]$, obtém-se

$$[\, v_1 \ \ v_2 \mid b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- Como o sistema é possível podemos escrever b como CL de v_1 e v_2.
- Para determinarmos os coeficientes α_1 e α_2 da CL aplicamos a fase ascendente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \to \left\{ \begin{array}{ccrr} \alpha_1 & & = & -2 \\ & \alpha_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

- Assim, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -2v_1 + 3v_2$

Observação

Vimos que o vetor $u = (-2,3)$ dos coeficientes da CL é solução do sistema com matriz ampliada $[\, v_1 \ v_2 \mid b \,]$, ou seja, da equação matricial $Ax = b$ com $A = [\, v_1 \ v_2 \,]$. Isto significa que $b = Au$ e portanto multiplicar uma matriz A por um vetor u corresponde a efetuar a CL das colunas de A com coeficientes dados pelas componentes do vetor u.

Determinação de combinações lineares

Exemplo

Considerando $c = (0,0,1)$ e novamente os vetores $v_1 = (2,2,1)$ e $v_2 = (2,3,1)$ do exemplo do slide 95, tem-se que o sistema $Ax = c$ com $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$ é impossível (verifique). Logo c não é CL de v_1 e v_2.

Escrever b como CL de vetores $v_1, \ldots, v_n$ - resumo

Consideremos $b, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e seja $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$. Tem-se:

- Se $Ax = b$ for impossível então b não é CL de $v_1, \ldots, v_n$.
- Se $Ax = b$ for possível então b é CL de $v_1, \ldots, v_n$, tendo-se:
  - Se $Ax = b$ é PD então b escreve-se como CL de $v_1, \ldots, v_n$ de uma única forma.
  - Se $Ax = b$ for PI então b escreve-se como CL de $v_1, \ldots, v_n$ de infinitas maneiras distintas.

  Cada solução $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $Ax = b$ dá origem a uma CL $b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, que podemos escrever como $b = Au$.

Espaço gerado e espaço das colunas

Espaço gerado por vetores e espaço das colunas de uma matriz

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$.

- Chama-se *espaço gerado* por $v_1, \ldots, v_n$, e denota-se por $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, ao subconjunto dos vetores de $\mathbb{R}^m$ que são CL de $v_1, \ldots, v_n$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle v_1, \ldots, v_n \rangle &= \{ b \in \mathbb{R}^m \; : \; b \text{ é CL de } v_1, \ldots, v_n \} \\ &= \Big\{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível} \Big\} \end{aligned}$$

- Chama-se *espaço das colunas* de A, e denota-se por $\mathcal{C}(A)$, ao espaço gerado pelos vetores que constituem as n colunas de A, isto é,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \Big\{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível} \Big\},$$

  que define o segundo subespaço vetorial fundamental associado a uma matriz.

Observação

$b \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) \;\Leftrightarrow\; b$ é CL de $v_1, \ldots, v_n \;\Leftrightarrow\; Ax = b$ é possível.

Exemplo do slide 95 revisitado

Consideremos novamente os vetores $v_1 = (2,2,1)$ e $v_2 = (2,3,1)$ do slide 95 e seja $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$. Tem-se:

- $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{b \in \mathbb{R}^3 \,:\, Ax = b \text{ é possível}\}$ e obtém-se, aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_3 \end{array}\right] = [A'|b']$$

- Logo o sistema $Ax = b$ é possível sse $b_1 - 2b_3 = 0$ e portanto,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \,:\, b_1 - 2b_3 = 0\},$$

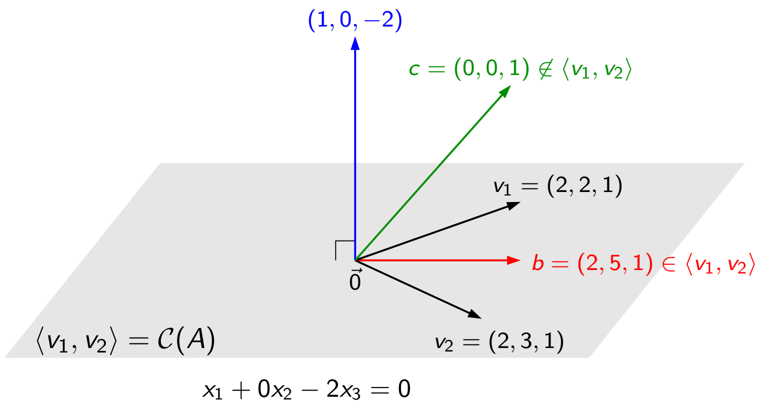
  que define o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.

Exemplo do slide 95 revisitado - interpretação geométrica

Consideremos novamente os vetores $b = (2,5,1)$ do slide 95 e $c = (0,0,1)$ do slide 97.

- Vimos que $b = (2,5,1) = -2v_1 + 3v_2$ (ver o slide 95) é CL de v_1 e v_2 e portanto pertence ao espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, o que se comprova pois b **satisfaz** a equação $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$ que define $\langle v_1, v_2 \rangle$.

- Vimos que $c = (0,0,1)$ do slide 97 não é CL de v_1 e v_2 e portanto não pertence ao espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, o que se comprova uma vez que c **não satisfaz** a equação $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$ que define $\langle v_1, v_2 \rangle$.



Algoritmo para determinar o espaço gerado/espaço das colunas

O mesmo tipo de procedimento que foi aplicado no exemplo do slide 99 pode ser utilizado para determinar o espaço gerado/espaço das colunas $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$, com $A = [\ v_1 \ \cdots \ v_n\ ]$ arbitrária.

Algoritmo

Aplica-se a fase descendente do método de Gauss a $[A|b]$, com $b = (b_1, \ldots, b_m)$ vetor genérico. Seja $[A'|b']$ matriz em escada obtida a partir de $[A|b]$. Tem-se:

- Se A' **não possui** linhas nulas então $v_1, \ldots, v_n$ **geram** $\mathbb{R}^m$, isto é,

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m.$$

- Se A' **possui** linhas nulas então $v_1, \ldots, v_n$ **não geram** $\mathbb{R}^m$ e obtém-se um sistema de equações definidoras para $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$,

$$\{(b_1, \ldots, b_m) : b'_{i_1} = 0,\ b'_{i_2} = 0,\ \cdots, b'_{i_k} = 0\},$$

  onde $b'_{i_1}, \ldots, b'_{i_k}$ são as componentes do vetor b' associadas às linhas nulas da matriz em escada A'.

Espaço gerado/espaço das colunas é o subespaço maximal

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo do slide 101 calcule

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1) \rangle.$$

Resolução

Seja $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]$. Tem-se

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathcal{C}(A) = \{b = (b_1, b_2, b_3) : Ax = b \ \text{ é possível}\}.$$

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss a $[A|b]$ obtém-se,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_! \\ 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & b_3 + b_2 - b1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

Como a matriz em escada A' não tem linhas nulas (1º caso do algoritmo do slide 101), não há restrições a impor ao vetor $b = (b_1, b_2, b_3)$ para o sistema ser possível.

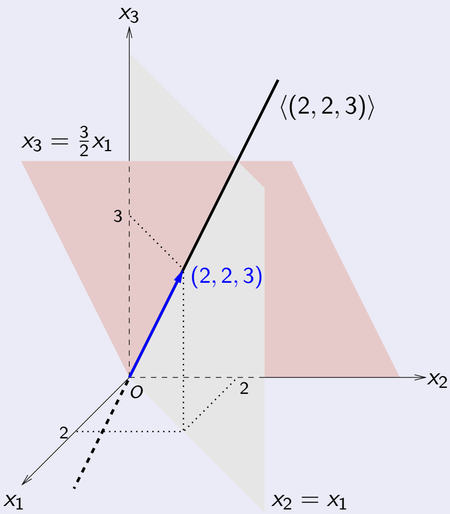
Logo $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$, isto é, v_1, v_3, v_3, v_4 geram o subespaço maximal.

Espaço gerado/espaço das colunas é definido por equações

Exercício na aula

Considere o subespaço $\langle(2,2,3)\rangle = \{b : b = \alpha(2,2,3) \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}\}$, que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e tem vetor diretor $v = (2,2,3)$. Aplicando o algoritmo do slide 101 mostre que esta reta corresponde à intersecção dos planos abaixo:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0 \\ -\dfrac{3}{2}x_1 \qquad + x_3 & = 0 \end{cases}$$



Resolução do exercício

Denotando por A a matriz com a única coluna $v = (2,2,3)$, $A = [\ v\ ]$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle(2,2,3)\rangle = \mathcal{C}(A) &= \{b = (b_1, b_2, b_3) \ : \ Ax = b \text{ é possível}\} \\ &= \{b = (b_1, b_2, b_3) \ : \ [A|b] \text{ é possível}\}. \end{aligned}$$

- Aplicando a fase descendente à matriz $[\ A|b\ ]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & b_1 \\ 2 & b_2 \\ 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - \frac{3}{2}L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{c|c} 2 & b_1 \\ 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & b_3 - \frac{3}{2}b_1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

- Tem-se que o sistema $Ax = b$ é possível se e só se as componentes do vetor b' associadas às linhas nulas da matriz em escada A' forem nulas, isto é, $b'_2 = b_2 - b_1 = 0$ e $b'_3 = b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 101). Logo,

$$\langle(2,2,3)\rangle = \mathcal{C}(A) = \left\{(b_1, b_2, b_3) \ : \ b_2 - b_1 = 0,\ b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0\right\},$$

que corrresponde à interseção dos planos $x_2 - x_1 = 0$ e $x_3 - \frac{3}{2}x_1 = 0$ como se pretendia mostrar.

Independência linear

Definição de independência linear

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ diz-se linearmente independente (l.i.) se

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\colon \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

  isto é, se a combinação linear com **todos** os coeficientes nulos,

$$0 v_1 + 0 v_2 + \cdots + 0 v_n = \vec{0},$$

  for a **única** forma de escrever o vetor nulo como CL de $v_1, \dots, v_n$.

- Caso contrário $\{v_1, \dots, v_n\}$ diz-se linearmente dependente (l.d.).

  Por outras palavras, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente se existem coeficientes **não todos nulos** $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

(In)dependência linear - exemplos

- $\{(1,3,-1)\}$ é l.i. pois,

$$\alpha\,(1,3,-1) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; (\alpha, 3\,\alpha\,, -\alpha) = (0,0,0) \;\Rightarrow\; \alpha = 0.$$

- $\{\vec{0}\}$ é l.d. pois $\alpha\,\vec{0} = \vec{0} \not\Rightarrow \alpha = 0$ (por exemplo, $2\,\vec{0} = \vec{0}$).

- $\{(1,3,-1),(2,6,-2)\}$ é l.d. uma vez que conseguimos obter o vetor nulo como CL dos vetores $(1,3,-1)$ e $(2,6,-2)$, com os coeficientes **não todos nulos**, por exemplo, como,

$$-2\,(1,3,-1) + 1\,(2,6,-2) = (0,0,0).$$

  Neste caso os vetores são múltiplos entre si, isto é, são colineares.

- $\{(1,3,-1),(0,1,5)\}$ é l.i. pois,

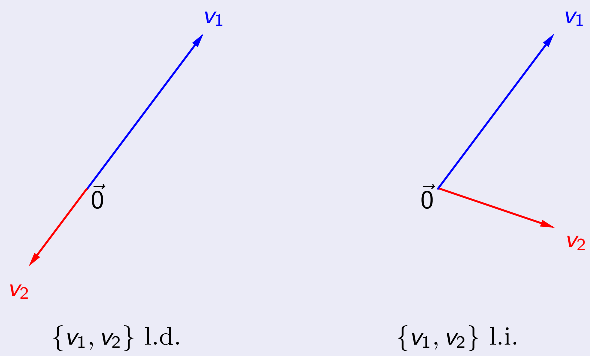
$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 3\,\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

  Neste caso os vetores não são múltiplos entre si, isto é, são não colineares.

Caso dos conjuntos de cardinalidade ≤ 2

Independência linear de conjuntos com um e com dois vetores

- $\{\vec{v}\}$ é linearmente independente $\Leftrightarrow$ $v \neq \vec{0}$.
- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente $\Leftrightarrow$ v_1 e v_2 são não colineares.



Decidir sobre a independência linear de conjuntos com mais que dois vetores não é, em geral, imediato. Por essa razão vamos começar por dar uma caracterização alternativa de conjunto linearmente independente.

Caracterização alternativa de (in)dependência linear

Teorema

Consideremos $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e sejam $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$ e A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares. Tem-se que:

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente **inde**pendente sse $Ax = \vec{0}$ for **de**terminado, isto é, todas as colunas de A' tiverem pivot ($\Leftrightarrow$ car$(A) = n$).
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente **de**pendente sse $Ax = \vec{0}$ for **inde**terminado, isto é, existirem as colunas sem pivot em A' ($\Leftrightarrow$ car$(A) < n$).

  Neste caso tem-se $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$ e cada solução $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A)$ origina a uma CL distinta,
  $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

O teorema decorre imediatamente da definição de independência linear e dos resultados do slide 97 com $b = \vec{0}$, que mostram que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ verificam
$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$
se e só se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de $Ax = \vec{0}$, isto é, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A)$.

(In)dependência linear via método de Gauss

A caracterização anterior permite usar o método de eliminação de Gauss para decidir a independência linear de conjuntos com n vetores em que n arbitrário.

Exercício na aula

Considere os vetores $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (\alpha, 3, 3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Decida sobre a independência linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ em função de α.

Resolução

Consideremos a matriz $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$. Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz A vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 - L_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 + L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 6-\alpha-\alpha^2 \end{bmatrix} = A'.$$

Tem-se $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ $Ax = \vec{0}$ determinado $\Leftrightarrow$ todas as colunas de A' têm pivot $\Leftrightarrow$ $6 - \alpha - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)6}}{2(-1)}$ (fórmula resolvente) $\Leftrightarrow \alpha \neq -3, 2$.
Daqui resulta ainda que $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.d. $\Leftrightarrow$ $\alpha = -3$ ou $\alpha = 2$.

Cardinalidade máxima de um conjunto l.i.

Da relação $\text{car}(A_{m\times n}) \leq \min\{m, n\}$ e da caracterização de independência linear de um conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dada no slide 108,

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \ \text{l.i.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{car}(A) = n,$$

onde $A = [v_1 \ v_2 \cdots v_n]$, deduz-se que se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é l.i. então $n \leq m$. Temos portanto o seguinte resultado.

Proposição

Um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^m$ possui no máximo m vetores

- Por exemplo, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, em que $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 3, 1, 4)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 1)$, é linearmente dependente pois é formado por 5 de vetores de $\mathbb{R}^4$.

Base para espaço nulo de uma matriz - exercício 2

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: aplicando a fase descendente à matriz $[A|\vec{0}]$ obtém-se,

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] = [A'|\vec{0}].$$

Neste caso não há colunas sem pivot em A', isto é, não há variáveis livres. Logo $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$.

Logo $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

Dependência linear e combinações lineares

Vimos que um conjunto formado por 2 vetores era l.d. se e só se um dos vetores era múltiplo do outro. Vejamos o que se passa com conjuntos com 3 vetores.

Consideremos $u, v, w \in \mathbb{R}^m$.

- Se w é CL de u e v, isto é, $w = \alpha u + \beta v$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\{u, v, w\}$ é l.d. pois podemos escrever o vetor nulo como CL de u, v, w com coeficientes **não todos nulos**. De facto,

$$\alpha\, u + \beta\, v - 1\, w = \vec{0}.$$

- Reciprocamente se $\{u, v, w\}$ é l.d. então por definição existem α, β, γ, **não todos nulos** tais que

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}.$$

  Se $\alpha \neq 0$ podemos escrever $u = -\frac{\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w$ e portanto u é CL de v e w. Analogamente se mostra que se $\beta \neq 0$ [$\gamma \neq 0$] então v [w] é CL dos restantes 2 vetores (que fica como exercício para os alunos).

Logo $\{u, v, w\}$ é l.d. se e só se um dos vetores é CL dos restantes 2 vetores.

Aplicando o mesmo tipo de ideias a conjuntos com um número arbitrário de vetores obtemos a caracterização de dependência linear do próximo slide.

Noção mais intuitiva do conceito de dependência linear

Teorema (Caracterização da dependência linear em termos de CL)

Um conjunto com dois ou mais vetores é linearmente dependente se e só se pelo menos um dos vetores do conjunto for combinação linear dos restantes vetores do conjunto.

Consequências

- Um conjunto de vetores que contenha o vetor nulo é l.d.
- Um conjunto de vetores que contenha um conjunto l.d. de vetores é l.d.
  Em particular, se o conjunto contiver vetores colineares é l.d.
- Reciprocamente, um conjunto de vetores não vazio que esteja contido um conjunto linearmente independente ainda é linearmente independente.

Exemplos

- $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(2,3,4,5)\}$ é l.d. pois $v_3 = v_1 + v_2$ e logo $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é tb l.d. para todo o $v_4 \in \mathbb{R}^4$, uma vez que $v_3 = v_1 + v_2 + 0v_4$.
- $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ é l.i. (verifique).
  Logo o subconjunto $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0)\}$ é também l.i.

TPC: verifique que no 1º caso $(1,1,-1,0) \in \mathcal{N}(A)$ com $A = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$. Porquê?

Base de um subespaço vetorial

Vamos dar agora aquele que é, possivelmente, o **conceito mais central em Álgebra Linear**.

Intuitivamente uma base de um subespaço vetorial V é um subconjunto de vetores de V tal que: (i) não contém vetores "redundantes" no sentido em que nenhum dos vetores da base se pode obter como CL dos restantes vetores da base; (ii) todo o vetor do subespaço V é CL linear dos vetores da base.

Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição de base

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $\underline{v_1, \ldots, v_k \in V}$. Diz-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma **base** de V se verificar as condições:

(i) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.

(ii) $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = V$, isto é, $v_1, \ldots, v_k$ geram V.

Exemplo fundamental: base canónica de $\mathbb{R}^m$

Vejamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, onde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são as colunas da matriz identidade de ordem 3:

(i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente.
De facto, a matriz $A = [\, e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \,]$ é a matriz identidade de ordem 3, I_3, que já está em escada e possui todas as colunas com pivot.

(ii) $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.
De facto, tem-se para qualquer $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(b_1, b_2, b_3) &= b_1(1, 0, 0) + b_2(0, 1, 0) + b_3(0, 0, 1)\\ &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.\end{aligned}$$

Logo qualquer $b \in \mathbb{R}^3$ é CL de e_1, e_2 e e_3 e portanto $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

A base anterior generaliza-se para $\mathbb{R}^m$ com m arbitrário.

Base canónica de $\mathbb{R}^m$

O conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ formado pelas m colunas da matriz identidade I_m,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\;\; e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\;\; \ldots, e_m = (0, 0, \ldots, 1),$$

constitui uma base de $\mathbb{R}^m$ que se designa por base canónica (b.c.).

Dimensão de um subespaço vetorial

Teorema-definição

Todas as bases de um mesmo subespaço vetorial V possuem o mesmo número de vetores a que chamamos dimensão de V e denotamos por $\dim V$.

Dimensão do subespaço minimal

- Convenciona-se que $\{\}$ é a base do subespaço mininal $\{\vec{0}\}$. Uma vez que esta base não possui vetores tem-se,

$$\boxed{\dim \{\vec{0}\} = 0}$$

Dimensão do subespaço maximal

- Vimos que $\mathbb{R}^m$ admitia uma base especial, dita base canónica, constituída pelas m colunas da matriz identidade de ordem m. Daqui resulta que,

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^m = m}$$

- Logo qualquer outra base para $\mathbb{R}^m$ também possui m vetores.

Caracterização das bases do subespaço maximal

Sejam $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^m$ e consideremos $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m]$ que é uma matriz quadrada de ordem m. Seja A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares. Uma vez que A' é também uma matriz **quadrada** obtêm-se, aplicando os resultados dos slides 108 e 101, as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \{v_1, \ldots, v_m\} \text{ lin. indep.} &\Leftrightarrow \text{todas as colunas de } A' \text{ têm pivot} \\ &\Leftrightarrow \text{não há linhas nulas em } A' \\ &\Leftrightarrow \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Logo por definição de base provámos o seguinte resultado.

Teorema (Critério para definir base do subespaço maximal $\mathbb{R}^m$)

Sejam $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é base de $\mathbb{R}^m$.
- $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente.
- $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathbb{R}^m$.

Bases de subespaços maximais - exemplo

Pelo teorema do slide anterior e pelo resultado do slide 110 tem-se o seguinte resultado.

Corolário

As bases de $\mathbb{R}^m$ são os conjuntos linearmente independentes com m vetores, ou seja, os conjuntos lin. indep. de cardinalidade máxima([10]).

Exemplo na aula

Quais dos seguintes conjuntos são lin. indep. / geram $\mathbb{R}^3$ / base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1,0,0),(2,5,0)\}$. (S / N / N)
2. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,0)\}$. (N / N / N)
3. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,9)\}$. (S / S / S)
4. $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(10,11,12)\}$. (N / S / N)

[10] E são também os conjuntos de geradores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade mínima.

Construção de bases para subespaços vetoriais

Um subespaço vetorial V pode ser definido de duas formas distintas:

- *Como CS de um sistema de equações lineares homogéneas* / *espaço nulo de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 6x_2 = 0\}$,

$$\text{ou seja,} \quad \mathrm{V} = \mathcal{N}(A), \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Gerado por um conjunto de vetores* / *espaço das colunas de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \langle (1,1,0,1), (1,2,-1,0), (1,0,1,2), (2,1,1,3) \rangle$,

$$\text{ou seja,} \quad V = \mathcal{C}(A), \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Base para o espaço nulo de uma matriz - exercício

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

TPC

Determinar uma base do hiperplano de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}.$$

Resolução do exercício do slide anterior

Reduzindo a matriz $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ obtém-se (verifique),

$$[\,A\,|\,\vec{0}\,] \;=\; \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 \qquad 2x_3 + 4x_4 & = \; 0 \\ \quad x_2 - x_3 - \; x_4 & = \; 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = \; 0 \end{cases} .$$

Tem-se que $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$ uma vez que existem variáveis livres (x_3 e x_4), obtendo-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4,\; x_2 = x_3 + x_4,\; x_3,\; x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) :\; x_3,\; x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\,x_3, x_3, x_3, 0) + (-4\,x_4, x_4, 0, x_4) :\; x_3,\; x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \underbrace{\{x_3(-2, 1, 1, 0) + x_4(-4, 1, 0, 1) :\; x_3,\; x_4 \in \mathbb{R}\}}_{\text{todas as somas de múltiplos de } (-2,1,1,0) \text{ e } (-4,1,0,1)} \\ &= \langle(-2, 1, 1, 0), (-4, 1, 0, 1)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{N}(A) = \langle v_1, v_2\rangle$. Como v_1 e v_2 não são múltiplos entre si, $\{v_1, v_2\}$ é lin. indep.
Logo por definição $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$ e $\dim \mathcal{N}(A) =$ nº de vetores da base $= 2$.

Observações

- O processo descrito no slide anterior para determinar uma base de $\mathcal{N}(A)$, pode ser generalizado para uma matriz A arbitrária (desde que o sistema $Ax = \vec{0}$ possua variáveis livres) e conduz sempre a bases de $\mathcal{N}(A)$, não sendo necessário provar que o conjunto é linearmente independente.

- O primeiro vetor da base do slide anterior, $v_1 = (-2, 1, 1, 0)$, corresponde à solução do sistema $Ax = \vec{0}$ considerando a variável livre $x_3 = 1$ e a variável livre $x_4 = 0$:

$$(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{\substack{x_3 \,=\, 1 \\ x_4 \,=\, 0}} (-2, 1, 1, 0) = v_1.$$

Analogamente, o segundo vetor da base, $v_2 = (-4, 1, 0, 1)$, corrresponde à solução do sistema $Ax = \vec{0}$ com $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$:

$$(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{\substack{x_3 \,=\, 0 \\ x_4 \,=\, 1}} (-4, 1, 0, 1) = v_2.$$

Base para o espaço nulo de uma matriz - algoritmo

Algoritmo

`Input:` Matriz A do tipo $m \times n$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{N}(A)$.

- Resolver o sistema $Ax = \vec{0}$ aplicando o método de Gauss a $[\, A \,|\, \vec{0} \,]$.
  Seja k o número de variáveis livres do sistema.
- Se $k = 0$, isto é, se não há variáveis livres então $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.
- Se $k > 0$, associamos alternadamente a cada variável livre a solução do sistema em que essa variável livre toma o valor 1 (ou qualquer valor não nulo) e as restantes variáveis livres o valor zero.

  O conjunto das k soluções de $Ax = \vec{0}$ obtidas deste modo constitui uma base para $\mathcal{N}(A)$.

Em particular,

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) = \text{nº de variáveis livres} = n - \operatorname{car}(A)}$$

Base para espaço nulo de uma matriz - exercício 2

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: aplicando a fase descendente à matriz $[A|\vec{0}]$ obtém-se,

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] = [A'|\vec{0}].$$

Neste caso não há colunas sem pivot em A', isto é, não há variáveis livres. Logo $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$.

Logo $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

Base para o espaço de colunas - exercício

Vamos agora ver como se podem determinar bases para o espaço de colunas de uma matriz.

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão para o espaço nulo das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \,].$$

Resolução: vamos começar por determinar $\mathcal{C}(A)$. Aplicando a fase descendente do método de Gauss a $[\, A \mid b \,] = [\, v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4 \mid b \,]$ vem,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & b_2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + 2b_3 \end{array}\right].$$

Logo para o sistema $Ax = b$ ser possível, $b_1 + b_2 + 2b_3 = 0$ e portanto

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \{ b = (b_1, b_2, b_3) \;:\; b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \}.$$

Base para o espaço de colunas - exercício (concl.)

Observação

- A sequência efetuada de operações elementares do método de Gauss apenas depende das colunas que estão associadas às colunas com pivot na matriz em escada.
- As colunas sem pivot em A' não têm influência na discussão do sistema em escada $[\, A' \mid b' \,]$.

De facto, aplicando a fase descendente apenas aos vetores que estão associados às colunas com pivot em A', vem (confirme),

$$[\, v_1 \;\; v_3 \mid b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ -1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + 2b_3 \end{array}\right],$$

e portanto,

$$\langle v_1, v_3 \rangle = \{ b = (b_1, b_2, b_3) \;:\; b_1 + b_2 + 2b_3 = 0 \} = \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle.$$

Logo os vetores associados às colunas sem pivot em A', v_2 e v_4, são redundantes. Como $= \langle v_1, v_3 \rangle = \mathcal{C}(A)$ e $\{v_1, v_3\}$ é l.i. (porque estão associados às colunas com pivot em A'), $\{v_1, v_3\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$ (contida no conjunto inicial de geradores). Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) =$ nº pivots em $A' = 2$.

Observações

- Mais geralmente, pode-se mostrar que dados $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [v_1 \ v_2 \cdots \ v_n] \to A'$ (escada), com $\text{car}(A) = k$, se tem,
$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k} \rangle,$$
onde $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ são as k colunas de A associadas às colunas com pivot em A', isto é, que as colunas de A que estão associadas às colunas sem pivot em A' **não são necessárias para gerarem** $\mathcal{C}(A)$ (são vetores redundantes).
- Por outro lado, $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ é linearmente independente, pois é constituído por vetores que estão associados a colunas com pivot na matriz em escada A'.
- Das considerações anteriores e da definição de base do slide 114 deduz-se o algoritmo do próximo slide.

Base para o espaço das colunas/espaço gerado - algoritmo

Algoritmo

`Input:` $A = [\, v_1 \ \ \cdots \ \ v_n \,]$ com $v_1 \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A:
$$A \to \cdots \to A' \text{ com } A' \text{ escada.}$$
- O subconjunto das colunas de A que correspondem às colunas com pivot em A' constitui uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, contida no conjunto inicial de geradores $v_1, \ldots, v_n$.

Em particular, tem-se

$$\boxed{\dim \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de pivots em } A' = \text{car(A)}.}$$

Obs: a característica de uma matriz A é muitas vezes definida como $\dim \mathcal{C}(A)$.

Exercício do slide 125 revisitado

- Aplicando o algoritmo do slide anterior à matriz $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \,]$ do exercício do slide 125 (não é necessário ampliar com o vetor genérico b) vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A',$$

  donde se deduz que $\{v_1, v_3\} = \{(1,1,-1),(2,0,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, pois são as colunas de A que estão associadas às colunas com pivot em A', tendo-se $\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{car}(A) = 2$. Note-se que a base anterior está <u>contida no conjunto inicial de geradores v_1, v_2, v_3, v_4</u>.

- Alternativamente, viu-se que $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_1 + b_2 + 2\,b_3 = 0\}$ e portanto $\mathcal{C}(A)$ é o CS da equação definidora $b_1 + b_2 + 2\,b_3 = 0$.

  Logo pode-se escrever $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(B)$, onde $B = [1 \;\; 1 \;\; 2]$ é matriz do sistema homogéneo cuja a única equação é $b_1 + b_2 + 2\,b_3 = 0$.

  Aplicando o algoritmo da base para o espaço nulo do slide 123 à matriz B deduz-se a nova base de $\mathcal{C}(A)$, $\{(-1,1,0),(-2,0,1)\}$ (verifique), que <u>já não está contida no conjunto inicial de geradores v_1, v_2, v_3, v_4</u>.

Relação entre as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\mathcal{C}(A)$

- Seja A matriz do tipo $m \times n$ e A' matriz em escada obtida a partir de A. Pelos resultados do slides 123 e 128 tem-se:
  - $\dim \mathcal{N}(A) = n - \mathrm{car}(A)$ (nº de colunas sem pivot em A').
  - $\dim \mathcal{C}(A) = \mathrm{car}(A)$ (nº de colunas com pivot em A').

- Daqui resulta imediatamente a seguinte resultado que estabelece uma relação importante entre as dimensões dos dois subespaços fundamentais associados à matriz A.

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de colunas de } A = n.}$$

Subespaço vetorial e dimensão

- O conhecimento da dimensão de um subespaço vetorial permite conhecer o tipo de conjunto que esse subespaço vetorial define
- Para os subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$) e do espaço ($\mathbb{R}^3$), tem-se

	subespaços vetoriais	dimensão
$\mathbb{R}^2$	$\{\vec{0}\}$	0
	retas que passam na origem	1
	$\mathbb{R}^2$	2
$\mathbb{R}^3$	$\{\vec{0}\}$	0
	retas que passam na origem	1
	planos que passam na origem	2
	$\mathbb{R}^3$	3

Têm-se ainda as seguintes caracterizações dos subespaços minimal e maximal de $\mathbb{R}^m$ com m arbitrário, em função das suas dimensões:

- $V = \{\vec{0}\} \;\Leftrightarrow\; \dim V = 0$.
- $V = \mathbb{R}^m \;\Leftrightarrow\; \dim V = m$.

Vetor pertence ao espaço nulo / espaço das colunas de uma matriz

Recordatória

Sejam $A_{m\times n}$, $u \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então:

- $u \in \mathcal{N}(A) \quad \Leftrightarrow \quad Au = \vec{0}$.
- $b \in \mathcal{C}(A) \quad \Leftrightarrow \quad [\,A\,|\,b\,]$ é possível.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$.

- Vejamos que $u = (-2, 1, 0, 1) \in \mathcal{N}(A)$. De facto,

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

- Vejamos que $b = (1, -1, 5) \in \mathcal{C}(A)$. De facto,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|b']$$

é possível.

Critério para definir base de um subespaço vetorial

- Vimos anteriormente que as bases de $\mathbb{R}^m$ (cuja dimensão é m) são os conjuntos linearmente independententes formados por m vetores de $\mathbb{R}^m$ (conjuntos l.i. de vetores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade **máxima**)
- Temos uma caracterização análoga para qualquer subespaço vetorial V cuja dimensão se conhece!

Teorema

As bases de um subespaço vetorial $V \neq \{\vec{0}\}$ de dimensão k são os conjuntos linearmente independentes formados por k vetores de V.

(Conjuntos l.i. de vetores de V de cardinalidade **máxima**).
Nos exercícios podemos aplicar o teorema anterior com a seguinte formulação.

Teorema (Critério para definir base de V)

Sejam $V \neq \{\vec{0}\}$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$. Tem-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é **base de** V se e só se verificar as seguintes 3 condições:

- $v_1, \ldots, v_k \in V$.
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.
- $\dim V = k$ (nº de vetores do conjunto).

Critério para definir base de um subespaço vetorial - exercício

Exercício na aula

Considere $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ e a matriz do exemplo do slide 132,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Mostre que $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Pelo critério do slide 133 basta verificar as seguintes condições:

- $v_1, v_2 \in \mathcal{N}(A)$. De facto, tem-se $Av_1 = \vec{0}$ e $Av_2 = \vec{0}$ (confirme).
- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. De facto, v_1 e v_2 são não colineares.
- $\dim \mathcal{N}(A) = 2$ (nº de vetores do conjunto). De facto, a matriz em escada A' obtida a partir de A tem 2 colunas sem pivot (confirme).

Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Componentes de um vetor numa base de um subespaço

Teorema (Representação única na base de um subespaço)

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de V. Para todo o $b \in V$ existem escalares únicos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k. \qquad (2)$$

Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ designam-se por componentes de b na base $\mathfrak{B}$.

Observação

O vetor $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ das componentes de b que verificam a relação (2) relativamente à base $\mathfrak{B}$ de V (assumindo esta base ordenada), é a solução única do sistema **PD** $Ax = b$, com $A = [\, v_1 \;\, v_2 \;\, \cdots \;\, v_k \,]$, isto é, verifica $Au = b$, e pode ser obtido reduzindo a matriz $[\, v_1 \;\, v_2 \;\, \cdots \;\, v_k \,|\, b \,]$.

De facto, por definição de base (slide 114) e pelo critério do slide 108,
ii) $b \in V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \mathcal{C}(A)$ e portanto o sistema $Ax = b$ é **possível**;
i) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é l.i. logo $\mathrm{car}(A) = k$ e portanto $Ax = b$ é **determinado**.

Componentes de um vetor numa base de um subespaço - exemplos

Exemplos

- O vetor das componentes de $b = (1, 4, 2)$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, é o próprio vetor $(1, 4, 2)$ pois,

$$(1, 4, 2) = 1\,(1, 0, 0) + 4\,(0, 1, 0) + 2\,(0, 0, 1) = 1\,e_1 + 4\,e_2 + 2\,e_3.$$

- O vetor das componentes de $b = (1, 4, 2)$ relativamente à base de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, é $(-3, 2, 2)$ pois,

$$(1, 4, 2) = -3\,(1, 0, 0) + 2\,(1, 1, 0) + 2\,(1, 1, 1) = -3\,v_1 + 2\,v_2 + 2\,v_3.$$

  O vetor $(-3, 2, 2)$ corresponde à solução (única) de $Ax = b$ com $A = [\, v_1 \;\, v_2 \;\, v_3 \,]$, e é calculado reduzindo a matriz $[\, v_1 \;\, v_2 \;\, v_3 \,|\, b \,]$.

TPC: determine as componentes do vetor genérico $b = (b_1, b_2, b_3)$ na base canónica (ver o slide 115) e na base $\{v_1, v_2, v_3\}$ anterior.