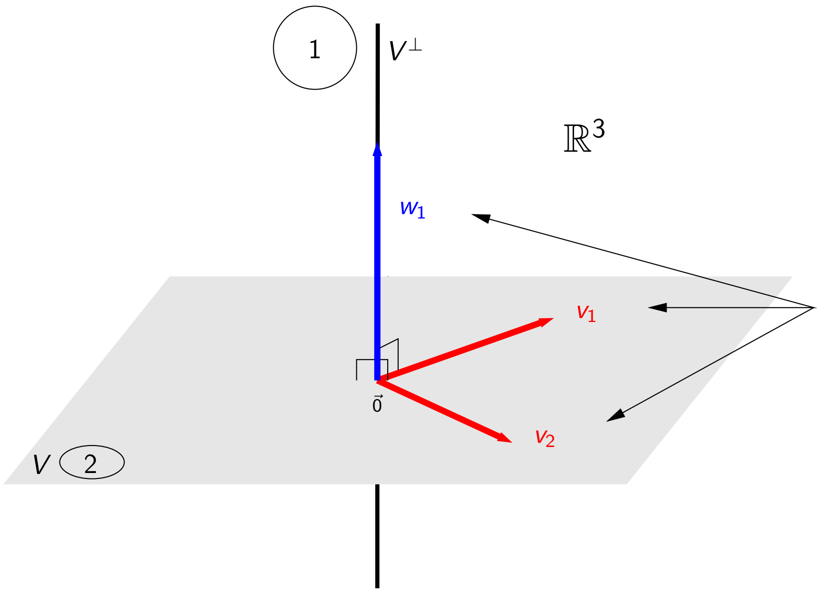
Ilustração das propriedades do complemento ortogonal quando V é um plano de $\mathbb{R}^3$ ($m = 3$ e $n = \dim V = 2$)



Neste exemplo:

base de $\mathbb{R}^3$: $\{v_1, v_2, w_1\}$

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\dim V = 2$ (V plano)

$\dim V^\perp = 3 - 2 = 1$ ($V^\perp$ reta)

Subespaços vetoriais e respetivos complementos ortogonais

Quadros-resumo do complemento ortogonal de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$V \subset \mathbb{R}^2$	$V^\perp \subset \mathbb{R}^2$	$\dim V + \dim V^\perp$
$\{\vec{0}\}$	$\mathbb{R}^2$	0+2
reta que passa na origem	reta perpendicular que passa na origem	1+1
$\mathbb{R}^2$	$\{\vec{0}\}$	2+0

$V \subset \mathbb{R}^3$	$V^\perp \subset \mathbb{R}^3$	$\dim V + \dim V^\perp$
$\{\vec{0}\}$	$\mathbb{R}^3$	0+3
reta que passa na origem	plano perpendicular que passa na origem	1+2
plano que passa na origem	reta perpendicular que passa na origem	2+1
$\mathbb{R}^3$	$\{\vec{0}\}$	3+0

Para qualquer $m \geq 2$ têm-se ainda as relações:

- $(\mathbb{R}^m)^\perp = \{\vec{0}\}$, isto é, subespaço maximal$^\perp$ = subespaço minimal.
- $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^m$, isto é, subespaço minimal$^\perp$ = subespaço maximal.

Complemento ortogonal de $\mathcal{N}(A)$ / CS do sistema homogéneo

- Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se pelo slide 149 aplicado a A^T que $\mathcal{C}(A^T)^\perp = \mathcal{N}((A^T)^T) = \mathcal{N}(A)$.
- Aplicando a 2ª propriedade do complemento ortogonal do slide 150 à relação $\mathcal{N}(A) = \mathcal{C}(A^T)^\perp$ do ponto anterior tem-se,

$$\mathcal{N}(A)^\perp = (\mathcal{C}(A^T)^\perp)^\perp = \mathcal{C}(A^T).$$

Obtivemos a 2ª relação fundamental sobre o complemento ortogonal de um subespaço vetorial associado a uma matriz.

Complemento ortogonal do espaço nulo

$$\boxed{\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A^T).}$$

Exercício

Exercício na aula

Considere $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ que define um plano de $\mathbb{R}^3$ com vetor normal $(1, 2, 3)$. Determine $V^\perp$.

Resolução: tem-se $V = \mathcal{N}([1\ 2\ 3])$ e portanto pela relação anterior vem,

$$V^\perp = \mathcal{N}([1\ 2\ 3])^\perp = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \langle(1, 2, 3)\rangle,$$

isto é, o complemento ortogonal do plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor **normal** $(1, 2, 3)$ é a reta perpendicular ao plano que passa na origem com vetor **diretor** $(1, 2, 3)$.

Só para recordar :)

Pelos resultados dos slides 149 e 153 podemos escrever o seguinte.

Mnemónica

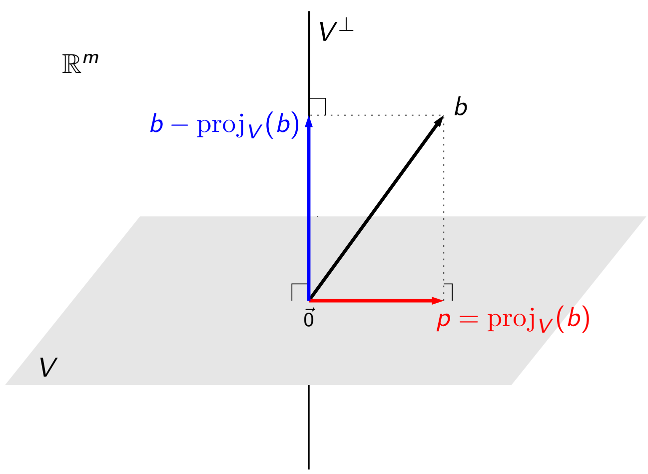
O complemento ortogonal dum subespaço vetorial associado a uma matriz, "troca" o espaço de colunas com o espaço nulo e transpõe essa matriz:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A)^\perp &= \mathcal{N}(A^T) \\ \mathcal{N}(A)^\perp &= \mathcal{C}(A^T) \end{aligned}$$

Conceito de projeção ortogonal

Teorema-definição

- Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ existe um e um só $p \in V$ tal que $b - p \in V^\perp$, isto é, tal que $b - p \perp V$.
- O vetor p é designado por *projeção ortogonal de b sobre V* e denota-se por $\text{proj}_V(b)$.



Conceito de projeção ortogonal

A definição anterior significa que o vetor $p = \text{proj}_V(b)$ é caracterizado por duas propriedades:

- $p \in V$ $\rightarrow$ projecta b sobre o subespaço vetorial V.
- $(b-p) \perp V$ $\rightarrow$ a direção da projeção é perpendicular a V.

Exercício na aula

Sejam $b = (-1,1,3)$, $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (-1,1,0)$ e $V = \langle v_1, v_2 \rangle$.
Mostre que $\text{proj}_V(b) = (0,2,2)$.

Resolução: por definição é necessário mostrar que $p = (0,2,2)$ verifica as seguintes 2 condições:

- $p \in V$.
- $(b-p) \perp V$, isto é, $(b-p) \in V^{\perp}$.

Resolução do exercício na aula (cont.)

Tem-se:

- $p = (0,2,2) \in V = \langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, onde $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$, se e só se $Ax = p$ for possível. Ora,

$$[\,A\,|\,p\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Como o sistema $Ax = p$ é possível, $p = (0,2,2) \in V$. ✓

- $b - p = (-1,1,3) - (0,2,2) = (-1,-1,1) \in V^{\perp} = \mathcal{C}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^T)$ se e só se $A^T(b-p) = \vec{0}$. De facto,

$$A^T(b-p) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

  Logo $(b-p) \in V^{\perp}$ ✓ (alternativamente pode-se mostrar que $b-p$ é ortogonal aos geradores de V, i.e., $(b-p)\cdot v_1 = (b-p)\cdot v_2 = 0$).

Uma vez que as duas condições são verificadas, $p = \text{proj}_V(b)$.

Casos triviais: projeção sobre os subespaços maximal e minimal

A projeção ortogonal sobre o subespaço maximal $\mathbb{R}^m$ ou sobre o subespaço minimal $\{\vec{0}\}$ decorre imediatamente por definição:

- $\text{proj}_{\mathbb{R}^m}(b) = b$ para todo o $b \in \mathbb{R}^m$.

  De facto,
  - $p = b \in \mathbb{R}^m$.
  - $b - p = b - b = \vec{0} \in (\mathbb{R}^m)^\perp = \{\vec{0}\}$.
- $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(b) = \vec{0}$ para todo o $b \in \mathbb{R}^m$.

  De facto,
  - $p = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$.
  - $b - \vec{0} = b \in \{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^m$.

Observação

Dado V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^m$, tem-se em geral,

$$\boxed{\text{proj}_V(b) = b \quad \Leftrightarrow \quad b \in V}$$

como decorre facilmente por definição de projeção ortogonal.

Caso não trivial mais simples: projeção sobre uma reta

E a projeção ortogonal sobre outros subespaços vetoriais?

- O caso não trivial mais simples corresponde a calcular a projeção ortogonal sobre um subespaço vetorial de dimensão um, isto é, sobre uma reta que passa na origem.

Fórmula da projeção ortogonal sobre uma reta

Seja $V = \langle v \rangle$ com $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$ tem-se

$$\boxed{\text{proj}_V(b) = \text{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{v^T b}{v^T v} v = \frac{v \cdot b}{v \cdot v} v}$$

A demonstração deste resultado será feita no próximo slide.

Projeção ortogonal sobre uma reta - demonstração

Demonstração: Por definição de projeção ortogonal,

- $p \in V = \langle v \rangle = \mathcal{C}(v)$. Logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p = \alpha v$.
- $(b - p) \in V^{\perp} = \mathcal{N}(v^T)$. Logo $v^T(b-p) = 0$.

Têm-se as equivalências,

$$\begin{aligned} v^T(b-p) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad v^T(b - \alpha v) = 0 \Leftrightarrow v^T b - \alpha v^T v = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha v^T v = v^T b \Leftrightarrow \alpha = \frac{v^T b}{v^T v} = \frac{v \cdot b}{v \cdot v}.\text{[11]} \end{aligned}$$

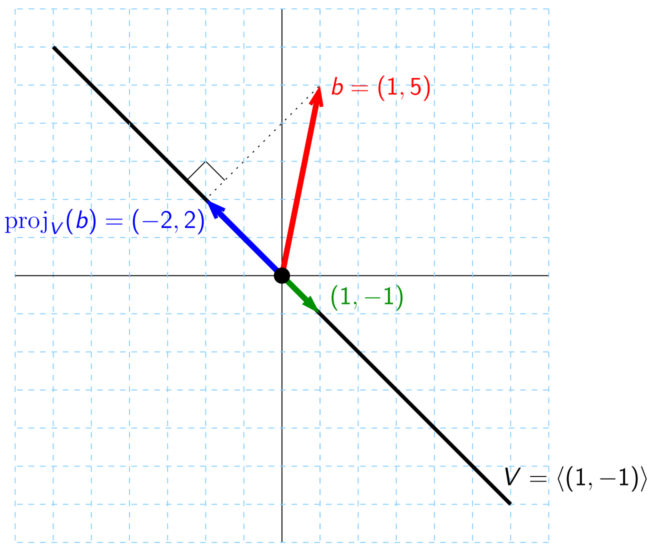
Logo $p = \alpha v = \dfrac{v^T b}{v^T v} v = \dfrac{v \cdot b}{v \cdot v} v.$ $\square$

[11] Note-se que $v \cdot v = \|v\|^2 \neq 0$ pois $v \neq 0$.

Projeção ortogonal sobre uma reta - exemplo

Sejam $b = (1,5)$ e $V = \{(x_1, x_2) \ : \ x_1 = -x_2\}$ a bissectriz dos quadrantes pares. Então V é uma reta que passa na origem com vetor director $(1,-1)$ (por exemplo), tendo-se $V = \langle (1,-1) \rangle$. Logo,

$$\text{proj}_V(b) = \text{proj}_{\langle (1,-1) \rangle}(b) = \frac{(1,-1)\cdot(1,5)}{(1,-1)\cdot(1,-1)}(1,-1) = (-2,2).$$



Projeção ortogonal sobre um vetor

Fórmula da projeção ortogonal sobre um vetor

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Dado $b \in \mathbb{R}^m$ define-se a *projeção ortogonal de b sobre o vetor v*, denotada $\text{proj}_v(b)$, como sendo a projeção de b sobre a reta definida por v, isto é,

$$\text{proj}_v(b) = \text{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{v \cdot b}{v \cdot v} v$$

Voltando ao exemplo do slide anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \text{proj}_{(-4,4)}(1,5) &= \text{proj}_{\langle(-4,4)\rangle}(1,5) = \frac{(-4,4)\cdot(1,5)}{(-4,4)\cdot(-4,4)}(-4,4) \\ &= \frac{1}{2}(-4,4) = (-2,2). \end{aligned}$$

Uma decomposição fundamental

Observação

Se $p = \text{proj}_V(b)$ tem-se por definição:

- $p \in V$
- $b - p \in V^\perp$

Logo $b - p = \text{proj}_{V^\perp}(b)$. De facto,

- $q = b - p \in V^\perp$
- $b - q = b - (b - p) = p \in V = (V^\perp)^\perp$

Como $b = p + (b - p)$ obtivemos a seguinte decomposição (única) de b segundo V e $V^\perp$:

$$\boxed{b = \text{proj}_V(b) + \text{proj}_{V^\perp}(b)}$$