Ortogonalidade e independência linear

Consideremos novamente um conjunto ortogonal de vetores $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(0,1,1),(1,2,-2),(4,-1,1)\}$. Tem-se:

- $v_3 \perp v_1, v_2 \;\Rightarrow\; v_3 \in \langle v_1, v_2\rangle^\perp \Rightarrow\; v_3 \notin \langle v_1, v_2\rangle$ $(v_3 \neq \vec{0})$.
  Logo v_3 não é CL de v_1 e v_2.
- $v_2 \perp v_1, v_3 \;\Rightarrow\; v_2 \in \langle v_1, v_3\rangle^\perp \Rightarrow\; v_2 \notin \langle v_1, v_3\rangle$ $(v_2 \neq \vec{0})$.
  Logo v_2 não é CL de v_1 e v_3.
- $v_1 \perp v_2, v_3 \;\Rightarrow\; v_1 \in \langle v_2, v_3\rangle^\perp \Rightarrow\; v_1 \notin \langle v_2, v_3\rangle$ $(v_1 \neq \vec{0})$.
  Logo v_1 não é CL de v_2 e v_3.

Como nenhum dos vetores é CL dos restantes vetores do conjunto concluímos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente (ver o slide 113).

Em geral, tem-se o seguinte resultado.

Teorema

Todo o conjunto ortogonal de vetores <u>não nulos</u> de $\mathbb{R}^m$ é linearmente independente.

Base ortogonal = base + conjunto ortogonal

Definição de base ortogonal

Uma base ortogonal de um subespaço vetorial V é uma base de V que é simultaneamente um conjunto ortogonal.

Por exemplo, o conjunto ortogonal considerado anteriormente,

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{(0,1,1),(1,2,-2),(4,-1,1)\},$$

define uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ porque é um conjunto linearmente independente formado por 3 vetores de $\mathbb{R}^3$.

Do teorema do slide 185 e da definição de base deduz-se o seguinte.

Teorema

Seja $V = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ tal que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é um conjunto ortogonal de vetores <u>não nulos</u> de $\mathbb{R}^m$. Então $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base ortogonal de V.

A projeção sobre subespaço vetorial munido de uma base ortogonal é direta e estende a fórmula da projeção sobre uma reta.

Projeção sobre um espaço munido de uma base ortogonal

Teorema

Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base ortogonal de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^m$.
Para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ tem-se,

$$\boxed{\operatorname{proj}_V(b) = \operatorname{proj}_{v_1}(b) + \cdots + \operatorname{proj}_{v_k}(b) = \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \cdots + \frac{b \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k.}$$

Muito importante: o resultado é falso se a base não for ortogonal (!!!)

Exercício na aula

Calcular $\operatorname{proj}_V(b)$ em que $V = \langle (0,1,1), (1,2,-2) \rangle$ e $b = (-1,0,4)$.

Resolução: Sejam $v_1 = (0,1,1)$ e $v_2 = (1,2,-2)$. Como $v_1 \cdot v_2 = 0$ com v_1 e v_2 não nulos, $\{v_1, v_2\}$ é uma base **ortogonal** de V (ver o slide 186) e obtém-se,

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_V(b) &= \operatorname{proj}_{v_1}(b) + \operatorname{proj}_{v_2}(b) = \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{b \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\
&= \frac{(-1,0,4) \cdot (0,1,1)}{(0,1,1) \cdot (0,1,1)} (0,1,1) + \frac{(-1,0,4) \cdot (1,2,-2)}{(1,2,-2) \cdot (1,2,-2)} (1,2,-2) \\
&= \tfrac{4}{2}(0,1,1) + \tfrac{-9}{9}(1,2,-2) = (-1,0,4).
\end{aligned}$$

Como obter bases ortogonais de um subespaço vetorial?

O seguinte algoritmo permite construir base ortogonais para subespaços vetoriais a partir de bases não ortogonais desses mesmos subespaços vetoriais.

Algoritmo - Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

`Input:` Base "original" $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de um subespaço vetorial V.
`Objectivo:` Determinar uma base ortogonal de V, $\{v_1, \ldots, v_n\}$

- $v_1 = u_1$.
- $v_2 = u_2 - \operatorname{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \dfrac{v_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_1} v_1$.
- $v_3 = u_3 - \operatorname{proj}_{v_1}(u_3) - \operatorname{proj}_{v_2}(u_3) = u_3 - \dfrac{v_1 \cdot u_3}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \dfrac{v_2 \cdot u_3}{v_2 \cdot v_2} v_2$.

  $\vdots$
- $v_n = u_n - \operatorname{proj}_{v_1}(u_n) - \operatorname{proj}_{v_2}(u_n) - \cdots - \operatorname{proj}_{v_{n-1}}(u_n)$
  $= u_n - \dfrac{v_1 \cdot u_n}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \dfrac{v_2 \cdot u_n}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \cdots - \dfrac{v_{n-1} \cdot u_n}{v_{n-1} \cdot v_{n-1}} v_{n-1}$.

Note-se que no caso em que a base original $\{u_1, \ldots, u_n\}$ já é ortogonal, o método de Gram-Schmidt devolve a própria base!

Método de Gram-Schmidt

Observações

- Podemos multiplicar cada vetor v_i da base ortogonal por um escalar não nulo que ainda obtemos uma base ortogonal de V.
- Em particular, tomando os versores dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ da base ortogonal obtém-se a base ortogonal em que todos os vetores são unitários, dita base ortonormada (o.n.) de V, $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$.

Exercício na aula

- A partir da base não ortogonal de $\mathbb{R}^3$,

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,-1,1), (1,0,1), (1,1,2)\},$$

obtenha uma **base ortogonal** de $\mathbb{R}^3$ usando Gram-Schmidt.

- Transforme a base ortogonal anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Exercício na aula (resolução)

Aplicando o método de Gram-Schmidt à base $\{u_1, u_2, u_3\}$ obtém-se:

- $v_1 = u_1 = (1,-1,1)$
- $v_2 = u_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 =$ $(1,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,-1,1) =$ $\frac{1}{3}(1,2,1) \rightsquigarrow (1,2,1)$
- $v_3 = u_3 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_3) - \mathrm{proj}_{v_2}(u_3)) = u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 =$ $(1,1,2) - \frac{(1,1,2)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) - \frac{(1,1,2)\cdot(1,2,1)}{(1,2,1)\cdot(1,2,1)}(1,2,1) =$ $(1,1,2) - \frac{2}{3}(1,-1,1) - \frac{5}{6}(1,2,1) = \frac{1}{2}(-1,0,1) \rightsquigarrow (-1,0,1)$

Obteve-se a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$,

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,-1,1), (1,2,1), (-1,0,1)\}.$$

Normalizando esta base ortogonal, dividindo cada vetor pela sua norma, obtém-se a base ortonormada de $\mathbb{R}^3$,

$$\{\mathrm{vers}(v_1), \mathrm{vers}(v_2), \mathrm{vers}(v_3)\} = \left\{ \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Observação

- Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^m$ e $\{w_1, \ldots, w_{m-n}\}$ uma base ortogonal de $V^\perp$ então $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_{m-n}\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^m$.

Note-se que se tem $v_i \perp w_j$, para todo o i e j, uma vez que por definição $V^\perp$ é constituído pelos vetores que são ortogonais a todos os vetores de V (e vice-versa).

Exercício na aula

- Determinar a projeção ortogonal de $b = (1, 1, 3)$ sobre $V = \langle (1, -1, 1), (1, 0, 1) \rangle$ ortogonalizando uma base de V.
- Estender a base ortogonal de V da alínea anterior a uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ usando a observação acima.

Exercício na aula (resolução)

- Uma base (não ortogonal) de V é $\{u_1, u_2\} = \{(1, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ (justifique!).
- Aplicando o método de Gram-Schmidt à base anterior (ver o slide 154 - os vetores são os mesmos) obtém-se:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = (1, -1, 1) \\ v_2 &= u_2 - \operatorname{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 1) \rightsquigarrow (1, 2, 1) \end{aligned}$$

Uma base ortogonal de V é portanto $\{v_1, v_2\} = \{(1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$, tendo-se (ver o teorema do slide 187),

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_V(b) &= \operatorname{proj}_{v_1}(b) + \operatorname{proj}_{v_2}(b) = \frac{v_1 \cdot b}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{v_2 \cdot b}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &= \frac{3}{3}(1, -1, 1) + \frac{6}{6}(1, 2, 1) = (2, 1, 2). \end{aligned}$$

- Calculando $V^\perp = \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$ com $A = [\, u_1 \ \ u_2 \,]$ (também se pode considerar $A = [\, v_1 \ \ v_2 \,]$), obtém-se $V^\perp = \langle (-1, 0, 1) \rangle$.
  Tem-se portanto a base ortogonal([13]) $\{w\} = \{(-1, 0, 1)\}$ de $V^\perp$.
- Reunindo a base ortogonal de V com a base ortogonal de $V^\perp$ obtém-se a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que estende a base ortogonal de V,

$$\{v_1, v_2, w\} = \{(1, -1, 1), (1, 2, 1), (-1, 0, 1)\}.$$

[13] Uma base de um subespaço vetorial de dimensão um é sempre ortogonal.